ÜBER REIHENENTWICKLUNGEN, DIE AUS LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG ENTSPRINGEN

INAUGURAL-DISSERTATION

VERFASST UND DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER KGL. BAYER. JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT WÜRZBURG
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT AM 9. JULI 1914

VON

GUSTAV LÖWENSTEIN
AUS STUTTGART.

HOFBUCHDRUCKEREI ZU GUTENBERG (CARL GRÜNINGER)
STUTTGART 1915.

REFERENT: Prof. Dr. Georg Rost.

Meinen lieben Eltern

in Dankbarkeit gewidmet.

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

I. Kap. Reziprozitäts-Gesetze. Seite 3—22.

§ 1. Zusammenstellung einiger Summationsformeln 3

§ 2. Asymptotische Darstellung der zu großen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen 4

§ 3. Asymptotische Darstellung der Eigenwerte und Eigenfunktionen mit hohen Ordnungszahlen 6

§ 4. Normierung der Eigenfunktionen 8

§ 5. Ausartungen der Randbedingungen 9

§ 6. Vorbereitung zum Reziprozitäts-Gesetz 10

§ 7. Aufstellung des Reziprozitäts-Gesetzes 12

§ 8. Der Fall der periodischen Randbedingungen 18

II. Kap. Unstetigkeiten in der Differentialgleichung der Greenschen Funktion. Seite 23—36.

§ 1. Definition der Greenschen Funktion, der Eigenwerte und Eigenfunktionen 23

§ 2. Asymptotische Darstellung der Greenschen Funktion für große $|\lambda|$ 25

§ 3. Partialbruchzerlegung der Greenschen Funktion 28

§ 4. Reihenentwicklung einer willkürlichen Funktion 33

III. Kap. Pochhammersche Reihenentwicklungen. Seite 37—46.

§ 1. Definition der Greenschen Funktion und der Eigenwerte . . 37

§ 2. Partialbruchzerlegung der Greenschen Funktion 41

§ 3. Reihenentwicklung einer willkürlichen Funktion 44

Einleitung.

Tauber[1] hat zuerst gezeigt, daß zu jeder, abgesehen von den Bedingungen:

$$\int_0^1 f(y)\,dy = 0,\quad f(-x) = -f(x)$$

willkürlichen, Funktion $f(x)$ eine Funktion $g(x)$ existiert, die folgenden beiden Gleichungen genügt:

$$\left| \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 [g(x+y) - g(x-y)] \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} y\,dy \\ g(x) = -\frac{1}{2}\int_0^1 [f(x+y) - f(x-y)] \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} y\,dy \end{array} \right|.$$

Ein verwandtes Gleichungspaar in der Form zweier sich gegenseitig auflösender Integralgleichungen erster Art:

$$\left| \begin{array}{l} F(x) = \int_0^1 G(y) \operatorname{cotg} \pi (x-y)\,dy \\ G(x) = \int_0^1 F(y) \operatorname{cotg} \pi (y-x)\,dy \end{array} \right|,$$

wo die Integrale als Cauchysche Hauptwerte zu nehmen sind, wurde von Hilbert[2] und Kellogg[3] auf potentialtheoretischem Wege hergeleitet. Ein anderer, sehr einfacher Beweis mit Hilfe der Fourierschen Reihe stammt von Pringsheim[4]. Da nun die gewöhnliche, d. h. nach den Funktionen:

$$\sin \nu\pi x,\quad \cos \nu\pi x \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

fortschreitende Fouriersche Reihe nur das einfachste Beispiel der Reihenentwicklungen nach den gewisse Paare von Randbedingungen erfüllenden Eigenfunktionen beliebiger linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung darstellt, so legt es der Pringsheimsche Beweis nahe, nach einer Erweiterung des obigen „Reziprozitäts-

[1] Monatshefte für Math. u. Phys., 2 (1891), S. 80.

[2] Grundzüge einer allg. Theorie der lin. Int.-Gleich., 2. Mitteilung (Gött. Nachr. 1904), S. 253.

[3] Gött. Diss. 1902, sowie Math. Ann. 58 (1904), S. 441 ff.

[4] Sitz.-Ber. der Münch. Akad., math.-phys. Klasse, 30 (1900), S. 79 ff.

Gesetzes“ in der angedeuteten Richtung zu fragen. Dies wird im I. Kapitel der vorliegenden Arbeit ausgeführt; es wird sich eine der obigen ganz analoge Doppelgleichung:

$$\left| \begin{array}{l} F(x) = \int_0^1 G(y)\, K(x,y)\, dy \\ G(x) = \int_0^1 F(y)\, K(y,x)\, dy \end{array} \right|$$

ergeben, worin die der Cotangente entsprechende Funktion $K(x, y)$ außer dem Glied $\operatorname{cotg} \pi (x - y)$ noch logarithmische Unstetigkeiten für $x = y$ aufweist.

Das II. Kapitel bringt Reihenentwicklungen willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen homogener linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung bei vorgegebenen Randbedingungen, und zwar mittels der Partialbruchzerlegung einer denselben Randbedingungen gehorchenden Greenschen Funktion, wie dies zuerst Hilbert[1] gezeigt hat. Während aber dort die Greensche Funktion eben jener homogenen Differentialgleichung genügt und eine unstetige erste Ableitung besitzt, soll hier die Greensche Funktion als Lösung einer solchen inhomogenen Differentialgleichung konstruiert werden, deren rechte Seite die notwendige Singularität enthält. Und zwar wird es zweckmäßig sein, dafür eine Funktion $K(x, y)$ zu wählen, die auf ein Reziprozitäts-Gesetz der oben erwähnten Art führt. Der Einfachheit halber werden wir $K(x, y) = \operatorname{cotg} \pi (x - y)$ nehmen und uns auf ein spezielles Paar von Randbedingungen beschränken.

Das III. Kapitel schließt an die Pochhammersche Reihenentwicklung beliebiger Funktionen nach den Integralen gewisser linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung[2] an, und gibt eine Einordnung der Ergebnisse in die Theorie der linearen Integralgleichungen. Dabei wird eine Greensche Funktion nach demselben Prinzip wie im II. Kapitel aufgestellt; die Rolle des Reziprozitätsgesetzes spielt aber jetzt, wo es sich um ein komplexes Integrationsgebiet handelt, der Cauchysche Satz, daher wird nicht $\operatorname{cotg} \pi (x - y)$, sondern $\frac{1}{x - y}$ die rechte Seite der Differentialgleichung bilden.

[1] a. a. O., S. 214 ff.

[2] Journal f. d. reine u. angew. Math. 74 (1872), S. 315 ff.

I. Kapitel.

Reziprozitäts-Gesetze.

§ 1. Zusammenstellung einiger Summationsformeln.

Um nachher den Gang der Rechnung nicht unterbrechen zu müssen, stellen wir hier einige Formeln zusammen, die zum Teil schon in der Theorie der Fourierschen Reihen verwendet werden.

$$(1)\quad \sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu\pi\alpha = \frac{\cos\frac{\pi}{2}\alpha - \cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\alpha}{2\sin\frac{\pi}{2}\alpha} = \\ = \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\tfrac{\pi}{2}\alpha\,.\,[1-\cos n\pi\alpha] + \tfrac{1}{2}\sin n\pi\alpha.$$

$$(2)\quad \sum_{\nu=1}^{n} \sin\nu\pi\alpha\cos\nu\pi\beta = \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu\pi(\alpha+\beta) + \\ + \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu\pi(\alpha-\beta) = \tfrac{1}{4}\operatorname{cotg}\tfrac{\pi}{2}(\alpha+\beta).[1-\cos n\pi(\alpha+\beta)] + \\ + \tfrac{1}{4}\operatorname{cotg}\tfrac{\pi}{2}(\alpha-\beta).[1-\cos n\pi(\alpha-\beta)] + \tfrac{1}{2}\sin n\pi\alpha\cos n\pi\beta.$$

$$(3)\quad \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos\nu\pi\alpha}{\nu} = -\pi\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\frac{1}{2}}^{\alpha}\sin\nu\pi\gamma\,d\gamma + \sum_{\mu=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{\mu}}{2\mu} = \\ = -\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\alpha}\operatorname{cotg}\tfrac{\pi}{2}\gamma\,[1-\cos n\pi\gamma]\,d\gamma - \\ -\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\alpha}\sin n\pi\gamma\,d\gamma + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{\mu}}{\mu}.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos\nu\pi\alpha\cos\nu\pi\beta}{\nu}=\tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos\nu\pi|\alpha+\beta|}{\nu}+\tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos\nu\pi|\alpha-\beta|}{\nu}=\\
&\quad=-\frac{\pi}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{|\alpha+\beta|}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}\gamma\,.\,[1-\cos n\pi\gamma]\,d\gamma-\\
&\quad-\frac{\pi}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{|\alpha-\beta|}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}\gamma\,[1-\cos n\pi\gamma]\,d\gamma-\\
&\quad-\frac{\pi}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{|\alpha+\beta|}\sin n\pi\gamma\,d\gamma-\frac{\pi}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{|\alpha-\beta|}\sin n\pi\gamma\,d\gamma+\\
&\quad+\tfrac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{\mu}}{\mu}.
\end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu\pi\alpha\sin\nu\pi\beta}{\nu}=-\tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos\nu\pi|\alpha+\beta|}{\nu}+\\
&\quad+\tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos\nu\pi|\alpha-\beta|}{\nu}=\frac{\pi}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{|\alpha+\beta|}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}\gamma\,.\,[1-\cos n\pi\gamma]\,d\gamma-\\
&\quad-\frac{\pi}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{|\alpha-\beta|}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}\gamma\,.\,[1-\cos n\pi\gamma]\,d\gamma+\frac{\pi}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{|\alpha+\beta|}\sin n\pi\gamma\,d\gamma-\\
&\quad-\frac{\pi}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{|\alpha-\beta|}\sin n\pi\gamma\,d\gamma.
\end{aligned}\right.$$

Zu (4) und (5) ist zu bemerken, daß wir α und β als reell voraussetzen.

§ 2. Asymptotische Darstellung der zu großen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen.

Wir gehen aus von dem sich selbst adjungierten, gewöhnlichen Differentialausdruck zweiter Ordnung:

$$(6)\qquad L(u)\equiv\frac{d^2u(x)}{dx^2}+p(x)\,u(x).$$

Darin bedeutet $p\,(x)$ eine reelle Funktion, die im ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ stetig, von beschränkter Schwankung und absolut integrierbar sei. Wir fragen nach denjenigen Werten des Parameters λ^2, für welche die Differentialgleichung:

$$L\,(u) + \lambda^2\, u\,(x) = 0 \tag{7}$$

eine solche Lösung $u\,(\lambda^2, x)$ besitzt, die den beiden Randbedingungen

$$\left(\frac{d}{dx}\, u\,(\lambda^2, x) - h\, u\,(\lambda^2, x)\right)_{x=0} = 0, \tag{8_0}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\, u\,(\lambda^2, x) + H\, u\,(\lambda^2, x)\right)_{x=1} = 0 \tag{8_1}$$

genügt. Die von λ^2 unabhängigen Konstanten h und H seien reell $\gtrless 0$ und vorerst endlich. Im folgenden soll eine für hinreichend große $|\lambda|$ geltende asymptotische Darstellung der „Eigenwerte“ λ^2 und der zugehörigen „Eigenfunktionen“ $u\,(\lambda^2, x)$ gegeben werden.

Zunächst gilt nach einem bekannten Satz, wenn wir (7) in die Form:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda^2 u = -p\,u$$

setzen, für jede Lösung dieser Gleichung:

$$u\,(\lambda^2, x) = c_1\,(\lambda^2)\,\frac{\sin \lambda x}{\lambda} + c_2\,(\lambda^2)\cos \lambda x - \\ - \frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin \lambda\,(x - z)\,.\,p\,(z)\,u\,(\lambda^2, z)\,dz.$$

(8_0) wird erfüllt durch:

$$c_1\,(\lambda^2) = h, \qquad c_2\,(\lambda^2) = 1,$$

$$u\,(\lambda^2, x) = \frac{h}{\lambda}\sin \lambda x + \cos \lambda x - \frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin \lambda\,(x - z)\,.\,p\,(z)\,u\,(\lambda^2, z)\,dz. \tag{9}$$

$p\,(x) \equiv 0$ gibt die erste Approximation:

$$u_1\,(\lambda^2, x) = \frac{h}{\lambda}\,\sin \lambda x + \cos \lambda x; \tag{10}$$

dies in (9) rechts eingesetzt, liefert die zweite:

$$u_2\,(\lambda^2, x) = u_1\,(\lambda^2, x) - \frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin \lambda\,(x - z)\,.\,p\,(z)\,u_1\,(\lambda^2, z)\,dz. \tag{11}$$

Durch Vergleichung von (9), (10) und (11) folgt:

$$u\,(\lambda^2, x) - u_1\,(\lambda^2, x) = u_2\,(\lambda^2, x) - u_1\,(\lambda^2, x) - \\ - \frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin \lambda\,(x - z)\,.\,p\,(z)\,[u\,(\lambda^2, z) - u_1\,(\lambda^2, z)]\,dz \tag{12}$$

oder

$$u(\lambda^2, x) - u_1(\lambda^2, x) =$$

$$(13) \quad = -\frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin\lambda(x-z)\,.\,p(z)\left(\frac{h}{\lambda}\sin\lambda z + \cos\lambda z\right)dz -$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin\lambda(x-z)\,.\,p(z)\,[u(\lambda^2, z) - u_1(\lambda^2, z)]\,dz.$$

Bedeutet also $M = M(\lambda)$ das Maximum von $|u(x) - u_1(x)|$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$, so zeigt (13):

$$M \leqq \frac{1}{|\lambda|}\int_0^1 |p(z)|\left(\left|\frac{h}{\lambda}\right| + 1\right)dz + \frac{1}{|\lambda|}\int_0^1 |p(z)|\,M\,dz^{1}$$

und daher

$$(14) \qquad M = \text{max. } |u(\lambda^2, x) - u_1(\lambda^2, x)| < \frac{\text{const.}}{|\lambda|}$$

für alle hinreichend großen $|\lambda|$.

In (12) eingesetzt, gibt dies:

$$|u(\lambda^2, x) - u_2(\lambda^2, x)| < \frac{\text{const.}}{|\lambda|^2};$$

ebenso folgt durch Differentiation von (12) und Anwendung von (14):

$$\left|\frac{d}{dx}u(\lambda^2, x) - \frac{d}{dx}u_2(\lambda^2, x)\right| < \frac{\text{const.}}{|\lambda|}.$$

Bezeichnen wir daher, nach dem Vorgang von Liouville, durch ψ eine solche Funktion von λ (und andern Variabeln), die für noch so großes $|\lambda|$ in festen endlichen Grenzen bleibt, so wird:

$$(15) \quad \left\{ u(\lambda^2, x) = \cos\lambda x + \frac{h}{\lambda}\sin\lambda x - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin\lambda(x-z)\cos\lambda z\,.\,p(z)\,dz + \frac{\psi}{\lambda^2}, \right.$$

$$(16) \quad \left\{ \frac{d}{dx}u(\lambda^2, x) = -\lambda\sin\lambda x + h\cos\lambda x - \right.$$

$$\left. -\int_0^x \cos\lambda(x-z)\cos\lambda z\,.\,p(z)\,dz + \frac{\psi}{\lambda} \right.$$

für alle hinreichend großen $|\lambda|$.

§ 3. Asymptotische Darstellung der Eigenwerte und Eigenfunktionen mit hohen Ordnungszahlen.

Da es nur auf die Werte von λ^2 ankommt, können wir uns auf die Untersuchung der positiven λ beschränken.

[1] Nach Sturm und Liouville sind alle λ reell.

Soll noch die Randbedingung (8_1) erfüllt sein, so ergeben (15) und (16):

$$(17)\quad \begin{cases} 0 = \left(\frac{d}{dx} u(\lambda^2, x) + H u(\lambda^2, x)\right)_{x=1} = -\lambda \sin\lambda + \\ \quad + (h + H)\cos\lambda - \int_0^1 \cos\lambda(1-z)\cos\lambda z \,.\, p(z)\, dz + \frac{\psi}{\lambda}, \end{cases}$$

eine Gleichung, die nach leichter Umformung[1] so geschrieben werden kann:

$$(18)\qquad [\lambda + \Psi_1(\lambda)]\sin\lambda + \Psi_2(\lambda)\cos\lambda + \frac{\Psi_3(\lambda)}{\lambda} = 0.$$

Ψ_1, Ψ_2 und Ψ_3 bleiben in endlichen Grenzen. Daraus folgt zunächst, daß die gesuchten Werte von λ sich mehr und mehr den Nullstellen von tg λ, den Vielfachen von π nähern:

$$(19)\qquad \lambda_\nu = \nu\pi + \alpha_\nu, \quad \lim_{\nu=\infty} \alpha_\nu = 0.$$

Aus (18) folgt:

$$\operatorname{tg}\lambda_\nu = \operatorname{tg}\alpha_\nu = \frac{\Psi_4}{\nu\pi + \alpha_\nu + \Psi_1} \text{ oder}$$

$$\alpha_\nu = \frac{\Psi_4 - (\Psi_1 + \alpha_\nu)\operatorname{tg}\alpha_\nu}{\pi} \cdot \frac{\alpha_\nu}{\operatorname{tg}\alpha_\nu} \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{\chi}{\nu},$$

$$(20)\qquad \lambda_\nu = \nu\pi + \frac{\chi}{\nu}.$$

Der Wert von χ bestimmt sich aus (17):

$$(21)\quad -\nu\pi \,.\, (-1)^\nu \frac{\chi}{\nu} + (h+H) \,.\, (-1)^\nu - \\ -\int_0^1 \cos\nu\pi(1-z) \,.\, \cos\nu\pi z \,.\, p(z)\, dz + \frac{\psi}{\nu} = 0.$$

Nun ist

$\cos\nu\pi(1-z) \,.\, \cos\nu\pi z = (-1)^\nu \cos^2\nu\pi z = (-1)^\nu\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\nu\pi z\right)$,

und $\int_0^1 \cos 2\nu\pi z \,.\, p(z)\, dz$ als Fourier-Koeffizient von $p(z)$ von der Ordnung $\frac{1}{\nu}$; also folgt schließlich:

$$\chi = \frac{h + H - \frac{1}{2}\int_0^1 p(z)\, dz}{\pi} + \frac{\psi}{\nu}.$$

Wir setzen noch

$$(22)\qquad \frac{1}{2}\int_0^1 p(z)\, dz = \gamma,$$

[1] Vergl. Kneser, Math. Ann. 58 (1904), S. 119.

dann wird für alle hinreichend großen ν:

$$\text{(A)} \qquad \lambda_\nu = \nu\pi + \frac{h+H-\gamma}{\nu\pi} + \frac{\psi}{\nu^2}.$$

Führen wir den Wert von λ_ν aus (A) in (15) ein, so erhalten wir:

$$u(\lambda_\nu^2, x) = u_\nu(x) = \cos\nu\pi x + \frac{h}{\nu\pi}\sin\nu\pi x - \frac{(h+H-\gamma)x}{\nu\pi}\sin\nu\pi x -$$

$$- \frac{1}{\nu\pi}\int_0^x \sin\nu\pi(x-z)\cos\nu\pi z \,.\, p(z)\,dz + \frac{\psi}{\nu^2}.$$

Da

$$\int_0^x \sin\nu\pi(x-z)\cos\nu\pi z \,.\, p(z)\,dz =$$

$$= \sin\nu\pi x \int_0^x \cos^2\nu\pi z \,.\, p(z)\,dz - \cos\nu\pi x \int_0^x \sin\nu\pi z\cos\nu\pi z \,.\, p(z)\,dz =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin\nu\pi x \int_0^x p(z)\,dz + \frac{\psi}{\nu}$$

ist, so kommt:

$$u_\nu(x) = \cos\nu\pi x + \frac{h(1-x) - Hx + \gamma x - \frac{1}{2}\int_0^x p(z)\,dz}{\nu\pi}\sin\nu\pi x + \frac{\psi}{\nu^2},$$

$$u_\nu(x) = \cos\nu\pi x + \frac{P(x)}{\nu}\sin\nu\pi x + \frac{\psi}{\nu^2},$$

wenn wir noch zur Abkürzung setzen:

$$\text{(B)} \qquad \frac{h(1-x) - Hx + \gamma x - \frac{1}{2}\int_0^x p(z)\,dz}{\pi} = P(x).$$

§ 4. Normierung der Eigenfunktionen.

Bekanntlich ist, wenn $u_\mu(x)$ und $u_\nu(x)$ zwei zu verschiedenen Eigenwerten gehörige Eigenfunktionen bedeuten:

$$\int_0^1 u_\mu(x)\,u_\nu(x)\,dx = 0 \qquad (\mu \neq \nu).$$

Ferner:

$$\left[u_\nu(x)\right]^2 = \cos^2\nu\pi x + 2\,\frac{P(x)}{\nu}\sin\nu\pi x\cos\nu\pi x + \frac{\psi}{\nu^2}.$$

Wir wollen zeigen, daß:

$$\int_0^1 \left[u_\nu(x)\right]^2 dx = \tfrac{1}{2} + \frac{\psi}{\nu^2}$$

ist.

Zu diesem Zweck haben wir nur zu beweisen:

$$\int_0^1 P(x) \sin \nu \pi x \cos \nu \pi x \, dx = \frac{\psi}{\nu},$$

und dies folgt daraus, daß $P(x)$ endlich, $P'(x)$ von beschränkter Schwankung ist. Indem wir also die normierten Eigenfunktionen:

$$u_\nu(x) : \sqrt{2 \int_0^1 [u_\nu(x)]^2 \, dx} =$$

$$\text{(C)} \qquad U_\nu(x) = \cos \nu \pi x + \frac{P(x)}{\nu} \sin \nu \pi x + \frac{\psi}{\nu^2}$$

einführen, erhalten wir die Beziehungen:

$$\text{(27)} \qquad \int_0^1 U_\mu(x) \, U_\nu(x) \, dx = 0 \qquad (\mu \neq \nu),$$

$$\text{(28)} \qquad \int_0^1 [U_\nu(x)]^2 \, dx = \tfrac{1}{2}.$$

§ 5. Ausartungen der Randbedingungen.

Bisher waren die reellen Konstanten h und H stets als endlich vorausgesetzt. Wenn nun h oder H oder beide in Unendlich übergehen, so lauten die Randbedingungen einfach:

(8_0^*) $\quad u(\lambda^2, 0) = 0 \quad$ bezw. (8_1^*) $\quad u(\lambda^2, 1) = 0.$

Durch ganz analoge Rechnungen erhält man dann die folgenden asymptotischen Darstellungen der Eigenwerte und der normierten Eigenfunktionen:

I. h und H unendlich, Randbedingungen (8_0^*) und (8_1^*):

$$\text{(A')} \qquad \lambda_\nu = \nu \pi - \frac{\gamma}{\nu \pi} + \frac{\psi}{\nu^2},$$

$$\text{(B')} \qquad P(x) = \frac{\gamma x - \frac{1}{2} \int_0^x p(z) \, dz}{\pi},$$

$$\text{(C')} \qquad U_\nu(x) = \sin \nu \pi x - \frac{P(x)}{\nu} \cos \nu \pi x + \frac{\psi}{\nu^2}.$$

II. h endlich, H unendlich, Randbedingungen (8_0) und (8_1^*):

$$\text{(A'')} \qquad \lambda_\nu = (\nu - \tfrac{1}{2}) \pi + \frac{h - \gamma}{\nu \pi} + \frac{\psi}{\nu^2},$$

$$\text{(B'')} \qquad P(x) = \frac{h(1-x) + \gamma x - \frac{1}{2} \int_0^x p(z) \, dz}{\pi},$$

$$\text{(C'')} \qquad U_\nu(x) = \cos (\nu - \tfrac{1}{2}) \pi x + \frac{P(x)}{\nu} \sin (\nu - \tfrac{1}{2}) \pi x + \frac{\psi}{\nu^2}.$$

III. h unendlich, H endlich, Randbedingungen (8_0*) und (8_1):

$$(A''') \qquad \lambda_\nu = (\nu - \tfrac{1}{2})\pi + \frac{H-\gamma}{\nu\pi} + \frac{\psi}{\nu^2},$$

$$(B''') \quad P(x) = \frac{-Hx + \gamma x - \frac{1}{2}\int_0^x p(z)\,dz}{\pi},$$

$$(C''') \quad U_\nu(x) = \sin(\nu - \tfrac{1}{2})\pi x - \frac{P(x)}{\nu}\cos\nu\pi x + \frac{\psi}{\nu^2}.$$

§ 6. Vorbereitung zum Reziprozitäts-Gesetz.

Es seien zwei Differentialausdrücke von der in § 2 charakterisierten Art vorgegeben:

$$L(u) = \frac{d^2u(x)}{dx^2} + p(x)\,u(x), \qquad M(v) = \frac{d^2v(y)}{dy^2} + q(y)\,v(y).$$

Zur Gleichung $L(u) + \lambda^2 u = 0$ gehöre das spezielle Paar von Randbedingungen:

$$u(\lambda^2, 0) = 0, \qquad u(\lambda^2, 1) = 0;$$

zu $M(v) + \mu^2 v = 0$ ein allgemeines Paar:

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{d}{dy}v(\mu^2, y) - h\,v(\mu^2, y)\right)_{y=0} &= 0, \\ \left(\frac{d}{dy}v(\mu^2, y) + H\,v(\mu^2, y)\right)_{y=1} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Wenn wir dann nach (20) den Index ν jeweils demjenigen Eigenwert anfügen, der am nächsten bei $\nu\pi$ liegt, so bestehen für hinreichend große ν die Entwicklungen:

$$(B') \qquad P(x) = \frac{\gamma x - \frac{1}{2}\int_0^x p(z)\,dz}{\pi},$$

$$(C') \qquad U_\nu(x) = \sin\nu\pi x - \frac{P(x)}{\nu}\cos\nu\pi x + \frac{\psi}{\nu^2};$$

$$(B) \qquad Q(y) = \frac{h(1-y) - Hy + \delta y - \frac{1}{2}\int_0^y q(z)\,dz}{\pi},$$

$$(C) \qquad V_\nu(y) = \cos\nu\pi y + \frac{Q(y)}{\nu}\sin\nu\pi y + \frac{\psi}{\nu^2},$$

wo noch $\frac{1}{2}\int_0^1 q(z)\,dz = \delta$ gesetzt ist.

Es liege nun eine im Intervall $0 \leq x \leq 1$ reelle, stetige Funktion $g(x)$ vor, deren erste Ableitung ebenfalls stetig sei und nur endlich viele Extremwerte habe. Hat $g(x)$ diese Eigenschaften, so konvergiert [1] die Reihe:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu V_\nu(x),$$

$$a_\nu = 2 \int_0^1 g(y) V_\nu(y)\, dy \tag{29}$$

gleichmäßig in jedem Intervall $\delta < x < 1 - \delta$ $(0 < \delta < \frac{1}{2})$ nach $g(x)$, während sie für $x = 0$ und $x = 1$ den Wert $\frac{g(0) + g(1)}{2}$ annimmt. Über die Größenordnung von a_ν folgt aus:

$$\mathfrak{V}_\nu(x) = \int_0^x V_\nu(y)\, dy = \frac{\sin \nu\pi x}{\nu\pi} - \frac{Q(y)}{\nu} \frac{\cos \nu\pi y}{\nu\pi} +$$

$$+ \int_0^x \frac{Q'(y)}{\nu} \frac{\cos \nu\pi y}{\nu\pi}\, dy + \frac{\psi}{\nu^2} = \frac{\sin \nu\pi x}{\nu\pi} + \frac{\psi}{\nu^2}$$

durch partielle Integration:

$$a_\nu = 2\,[g(y)\,\mathfrak{V}_\nu(y)]_0^1 - 2\int_0^1 g'(y)\,\mathfrak{V}_\nu(y)\,dy = \left[\frac{2\,g(y)\sin \nu\pi y}{\nu\pi}\right]_0^1 -$$

$$- \frac{1}{\nu\pi}\int_0^1 g'(y) \sin \nu\pi y\, dy + \frac{\psi}{\nu^2} = \frac{\psi}{\nu^2},$$

da für eine Funktion wie $g'(x)$:

$$\int_0^1 g'(y) \sin \nu\pi y\, dy = \frac{\psi}{\nu}$$

ist [2]. Bilden wir jetzt mit den Koeffizienten (29) die Reihe:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu U_\nu(x),$$

so konvergiert diese für $0 < x \leq 1$ absolut und gleichmäßig; die durch sie dargestellte Funktion werde $f(x)$ genannt. $f(x)$ verschwindet für $x = 0$ und $x = 1$.

---

[1] Kneser, a. a. O., S. 121 ff.

[2] Vergl. z. B. Riemann-Weber I, § 37.

§ 7. Aufstellung des Reziprozitäts-Gesetzes.

Es sei δ eine beliebig kleine, aber dann feste Größe, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, so verstehen wir unter x durchweg einen Punkt des Intervalls $\delta \leqq x \leqq 1 - \delta$; für ihn ist:

$$(30) \qquad f_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu U_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{n} 2 \int_0^1 g(y) V_\nu(y)\, dy \,.\, U_\nu(x) =$$

$$= \int_0^1 g(y) K_n(x,y)\, dy,$$

$$(31) \qquad K_n(x,y) = 2 \sum_{\nu=1}^{n} U_\nu(x) V_\nu(y).$$

Die Darstellungen (C) und (C') zeigen sofort, daß von einer gleichmäßigen Konvergenz von $K_n(x,y)$ für $\lim n = +\infty$ gar keine Rede sein kann. Wohl aber soll in diesem Paragraphen gezeigt werden, daß eine (mit bestimmten Unstetigkeiten für $x = y$ behaftete) Funktion $K(x,y)$ existiert, so daß gleichmäßig in $\delta < x \leqq 1 - \delta$:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \int_0^1 g(y) K_n(x,y)\, dy = \int_0^1 g(y) K(x,y)\, dy$$

wird. Beim Beweis dieser Behauptung gebrauchen wir folgende Bezeichnungen: $s_1(x,y)$, $s_2(x,y)$ usw. bezeichnen von n unabhängige, in x und y stetige Funktionen; $\varepsilon_1(n;x,y)$, $\varepsilon_2(n;x,y)$ usw. solche Funktionen, die für $\lim n = +\infty$ gleichmäßig in x und y zur Null konvergieren.

Nun wird nach (C) und (C'):

$$K_n(x,y) = 2 \sum_{\nu=1}^{n} U_\nu(x) V_\nu(y) =$$

$$= 2 \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \sin \nu\pi x - \frac{P(x)}{\nu} \cos \nu\pi x + \frac{\psi}{\nu^2} \right\}$$

$$\left\{ \cos \nu\pi y + \frac{Q(y)}{\nu} \sin \nu\pi y + \frac{\psi}{\nu^2} \right\} =$$

$$= 2 \sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu\pi x \cos \nu\pi y + 2 \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ Q(y) \frac{\sin \nu\pi x \sin \nu\pi y}{\nu} - \right.$$

$$\left. - P(x) \frac{\cos \nu\pi x \cos \nu\pi y}{\nu} \right\} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\psi_\nu}{\nu^2}.$$

Nach den Formeln des § 1 ist dies:

$$
(32)\quad \left\{\begin{aligned}
K_n(x,y) = {}& \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\tfrac{\pi}{2}(x-y)\,.\,[1-\cos n\pi(x-y)] + \\
& + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\tfrac{\pi}{2}(x+y)\,.\,[1-\cos n\pi(x+y)] + \\
& + \sin n\pi x \cos n\pi y + \\
& + \tfrac{\pi}{2}[P(x)-Q(y)]\int_{\frac{1}{2}}^{|x-y|}\operatorname{cotg}\tfrac{\pi}{2}z\,(1-\cos n\pi z)\,dz + \\
& + \tfrac{\pi}{2}[P(x)+Q(y)]\int_{\frac{1}{2}}^{|x+y|}\operatorname{cotg}\tfrac{\pi}{2}z\,(1-\cos n\pi z)\,dz + \\
& + \tfrac{\pi}{2}[P(x)-Q(y)]\int_{\frac{1}{2}}^{|x-y|}\sin n\pi z\,dz + \\
& + \tfrac{\pi}{2}[P(x)+Q(y)]\int_{\frac{1}{2}}^{|x+y|}\sin n\pi z\,dz - \\
& - P(x)\,.\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^\mu}{\mu} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\psi_\nu}{\nu^2}\,.
\end{aligned}\right.
$$

Was nun die einzelnen Glieder von (32) betrifft, so gibt die letzte Zeile, da

$$-\sum_{\mu=1}^{+\infty}\frac{(-1)^\mu}{\mu} = \log 2, \text{ und } \sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\psi_\nu}{\nu^2}$$

konvergiert:

$$(33)\quad -P(x)\,.\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^\mu}{\mu} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\psi_\nu}{\nu^2} = s_1(x,y) + \varepsilon_1(n;x,y).$$

Die beiden Glieder der vorhergehenden Zeile in (32) sind für jedes x und y von der Ordnung $\frac{1}{n}$:

$$
\begin{aligned}
(34)\quad & \tfrac{\pi}{2}[P(x)-Q(y)]\int_{\frac{1}{2}}^{|x-y|}\sin n\pi z\,dz + \\
& + \tfrac{\pi}{2}[P(x)+Q(y)]\int_{\frac{1}{2}}^{|x+y|}\sin n\pi z\,dz = \varepsilon_2(n;x,y).
\end{aligned}
$$

$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}z$ ist für $\delta \leqq z \leqq 2-\delta$ eine reguläre, beschränkte Funktion; und da die Integrationsvariable in

$$\int_{\frac{1}{2}}^{x+y|}\operatorname{cotg}\tfrac{\pi}{2}z\,.\,(1-\cos n\pi z)\,dz$$

für $\delta \leq x \leq 1 - \delta$, $0 \leq y \leq 1$ eben jenes Intervall nicht verläßt, wird:

$$(35)\quad \frac{\pi}{2}\,[P(x) + Q(y)] \int_{\frac{1}{2}}^{|x+y|} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} z \,.\, (1 - \cos n\pi z)\, dz = \\ = s_3(x, y) + \varepsilon_3(n; x, y).$$

Aus denselben Gründen wird:

$$(36)\quad \begin{cases} \int_0^1 g(y) \,.\, \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} (x + y) \,.\, [1 - \cos n\pi (x + y)]\, dy = \\ \qquad = \int_0^1 g(y)\, s_4(x, y)\, dy + \varepsilon_4(n; x), \\ \int_0^1 g(y) \,.\, \sin n\pi x \cos n\pi y\, dy = \varepsilon_5(n; x). \end{cases}$$

Setzen wir daher (33) bis (36) in (30) und (32) ein, so kommt:

$$(37)\quad \begin{cases} f_n(x) = \int_0^1 g(y)\, K_n(x, y)\, dy = \int_0^1 g(y)\, s_6(x, y)\, dy + \varepsilon_6(n; x) + \\ \qquad + \tfrac{1}{2} \int_0^1 g(y) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} (x - y) \,.\, [1 - \cos n\pi (x - y)]\, dy + \\ \qquad + \frac{\pi}{2} \int_0^1 g(y)\, [P(x) - Q(y)] \int_{\frac{1}{2}}^{x-y} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} z\, (1 - \cos n\pi z)\, dz\, dy; \end{cases}$$

daher kommt es nur noch auf die Diskussion der zuletzt erwähnten beiden Glieder an. Zerlegen wir[1]

$$\int_0^1 g(y) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} (x - y)\, [1 - \cos n\pi (x - y)]\, dy = \int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^1 \ldots,$$

wo ε eine beliebig kleine Zahl $0 < \varepsilon < \delta$ ist, so bildet im ersten und dritten Intervall der Integrand eine endliche Funktion; da überdies

$$\left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^1\right) g(y) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} (x - y) \cos n\pi (x - y)\, dy$$

bei festem ε mit wachsendem n beliebig klein wird, ist:

$$\begin{cases} \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^1\right) g(y) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} (x - y)\, [1 - \cos n\pi (x - y)]\, dy = \\ \qquad = \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^1\right) g(y) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} (x - y)\, dy + \varepsilon_7(n; \varepsilon, x, y). \end{cases}$$

Damit aber aus dieser Gleichung die folgende:

$$(38)\quad \begin{cases} \int_0^1 g(y) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} (x - y)\, [1 - \cos n\pi (x - y)] = \\ \qquad = \int_0^1 g(y) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} (x - y)\, dy + \varepsilon_7(n; x, y) \end{cases}$$

[1] Vergl. Pringsheim, a. a. O., S. 83 f.

hervorgehe — das Integral rechts als Hauptwert gedacht —, muß nicht nur:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} g(y) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2}(x-y)\, dy, \tag{39}$$

sondern, damit $\varepsilon_7(n; x, y)$, die obere Grenze von $\varepsilon_7(n; \varepsilon, x, y)$ für $\lim \varepsilon = +0$, mit wachsendem n beliebig abnehme, auch:

$$\lim_{n=\infty} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} g(y) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2}(x-y) \cos n\pi (x-y)\, dy \tag{40}$$

durch Wahl eines hinreichend kleinen ε beliebig klein werden.

Nun ist:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} g(y) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2}(x-y)\, dy = \int_0^{\varepsilon} [g(x-z) - g(x+z)] \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} z\, dz =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{g(x-z) - g(x+z)}{z}\, dz + \int_0^{\varepsilon} [g(x-z) - g(x+z)]\, \varphi(z)\, dz,$$

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} g(y) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2}(x-y) \cos n\pi (x-y)\, dy =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{g(x-z) - g(x+z)}{z} \cos n\pi z\, dz +$$

$$+ \int_0^{\varepsilon} [g(x-z) - g(x+z)]\, \varphi(z) \cos n\pi z\, dz,$$

wobei $\varphi(z)$ die auch bei $z = 0$ reguläre Funktion $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} z - \frac{2}{\pi z}$ bedeutet. Es genügt also, unsere Voraussetzung für die beiden Ausdrücke:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{g(x-z) - g(x+z)}{z}\, dz \text{ und} \\ \displaystyle\lim_{n=\infty} \int_0^{\varepsilon} \frac{g(x-z) - g(x+z)}{z} \cos n\pi z\, dz \end{cases} \tag{41}$$

als erfüllt zu zeigen. Da wir nun $g(x)$ einmal stetig differenzierbar angenommen haben, ist:

$$\frac{g(x-z) - g(x+z)}{z} = -g'(x - \vartheta_1 z) - g'(x - \vartheta_2 z) \quad \begin{pmatrix} 0 \leqq \vartheta_1 \leqq 1, \\ 0 \leqq \vartheta_2 \leqq 1 \end{pmatrix}$$

eine in der Nähe von $z = 0$ stetige, und daher absolut integrierbare Funktion, woraus sofort folgt, daß die beiden Ausdrücke (41), daß also auch (39) und (40) mit ε beliebig klein zu machen sind, womit wiederum (38) bewiesen ist.

Der letzte Teil von (37),

$$\frac{\pi}{2}\int_0 g(y)\,[P(x) - Q(y)] \int_{\frac{1}{2}}^{|x-y|} \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} z\,(1 - \cos n\pi z)\,dz\,dy,$$

ist einfacher zu erledigen. In dem in Betracht kommenden Intervall wird $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} z$ nur für $z = 0$, $x = y$ unstetig, es ist also wieder $= \frac{2}{\pi z} + \varphi(z)$ zu setzen. Wegen: $\int_{\frac{1}{2}}^{|x-y} \varphi(z)\,dz = \varepsilon_8(x, y)$,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{|x-y} \varphi(z) \cos n\pi z\,dz = \varepsilon_8(n; x, y)$$

bleibt wesentlich nur:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{|x-y|} \frac{2}{\pi z}\,(1 - \cos n\pi z)\,dz = \frac{2}{\pi}\log 2\,|x-y + \varepsilon_9(n; x, y),$$

da $\int_{\frac{1}{2}}^{|x-y} \frac{\cos n\pi z}{z}\,dz = \int_{\frac{n\pi}{2}}^{n\pi|x-y|} \frac{\cos u}{u}\,du$ nach Null konvergiert, auch wenn $|x-y|$ eine Nullfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ durchlaufen sollte, da dann nur n hinreichend stark (etwa $n_\nu = \frac{1}{\varepsilon_\nu^2}$) gegen Unendlich gehen muß. Daher:

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\pi}{2}\int_0^1 g(y)\,[P(x) - Q(y)] \int_{\frac{1}{2}}^{x-y} \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} z\,(1 - \cos n\pi z)\,dz\,dy = \\ &\qquad = \int_0^1 g(y)\,[P(x) - Q(y)] \log|x-y| + \\ &\qquad + \int_0^1 g(y)\,\varepsilon_{10}(x, y)\,dy + \varepsilon_{10}(n; xy). \end{aligned}\right.$$

Vereinigung von (37), (38) und (42) gibt also endlich:

$$(43)\quad f(x) = \int_0^1 g(y)\,\{\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}(x-y) + [P(x) - Q(y)]\log|x-y| + S(x, y)\}\,dy,$$

worin $S(x, y)$ eine stetige Funktion von x und y bedeutet. (43) gilt zunächst für $\delta \leqq x \leqq 1 - \delta$.

Aus $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu U_\nu(x)$ erhalten wir die zweite Form der Koeffizienten:

$$a_\nu = 2\int_0^1 f(y)\,U_\nu(y)\,dy.$$

Daher wird:

$$g_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu V_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{n} 2 \int_0^1 f(y)\, U_\nu(y)\, dy \,.\, V_\nu(x) =$$

$$= \int_0^1 f(y)\, K_n(y, x)\, dy,$$

wo $K_n(y, x)$ durch (31) definiert ist. Führen wir also die vorhergehende Untersuchung mit Vertauschung von f und g durch, so erhalten wir ebenso für $\delta \leqq x \leqq 1 - \delta$:

$$(43)\; g(x) = \int_0^1 f(y) \{\tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \tfrac{\pi}{2}(y-x) + [P(y) - Q(x)] \log|y-x| + S(y,x)\}\, dy.$$

Dazu ist nur noch zu zeigen, daß auch $f(x)$ in jedem Punkt jenes Intervalls eine stetige erste Ableitung besitzt, woraus dann wie S. 15 folgt, daß die (39) und (40) entsprechenden Integrale mit ε beliebig klein werden. Nach (43) enthält $f(x)$ außer einem stetig differenzierbaren Teil die Integrale:

$$\int_0^1 g(y) \operatorname{cotg} \tfrac{\pi}{2}(x-y)\, dy = \lim_{\varepsilon = +0} \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^1 \right) g(y) \operatorname{cotg} \tfrac{\pi}{2}(x-y)\, dy$$

und $\int_0^1 g(y)\, [P(x) - Q(y)] \log|x-y|\, dy.$

Nun folgt durch partielle Integration:

$$\left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^1 \right) g(y) \operatorname{cotg} \tfrac{\pi}{2}(x-y)\, dy = \left[-g(y) \,.\, \tfrac{2}{\pi} \log \sin \tfrac{\pi}{2} |x-y| \right]_{y=x-\varepsilon}^{y=x+\varepsilon} +$$

$$+ \left[-g(y) \,.\, \tfrac{2}{\pi} \log \sin \tfrac{\pi}{2} |x-y| \right]_{y=0}^{y=1} +$$

$$+ \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^1 \right) g'(y) \,.\, \tfrac{2}{\pi} \log \sin \tfrac{\pi}{2} |x-y|\, dy;$$

der erste Summand verschwindet für $\lim \varepsilon = +0$, da $g(y)$ stetig ist; der zweite ist für $\delta \leqq x \leqq 1 - \delta$ stetig differenzierbar; und der letzte hat die Ableitung:

$$\left[g'(y) \,.\, \tfrac{2}{\pi} \log \sin \tfrac{\pi}{2} |x-y| \right]_{y=x+\varepsilon}^{y=x-\varepsilon} - \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^1 \right) g'(y) \operatorname{cotg} \tfrac{\pi}{2}(x-y)\, dy,$$

eine für $\lim \varepsilon = +0$ wegen der Stetigkeit von $g'(y)$ selbst stetige Funktion. Ebenso ist, unter Beachtung der Stetigkeit von $g(y)\,[P(x) - Q(y)]$ und seiner Ableitung nach y, das zweite obige Integral zu behandeln.

Wir haben demnach für das Intervall $\delta \leqq x \leqq 1 - \delta$ das Reziprozitätsgesetz gewonnen:

$$(44)\quad \begin{cases} f(x) = \int_0^1 g(y)\, K(x,y)\, dy, \\ g(x) = \int_0^1 f(y)\, K(y,x)\, dy; \\ K(x,y) = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2}(x-y) + [P(x) - Q(y)] \log|x-y| + S(x,y). \end{cases}$$

Da wir δ beliebig klein annehmen können, ohne $K(x, y)$ zu ändern, gelten die Formeln (44) für jedes von 0 und 1 verschiedene x des Intervalls. Insbesondere wird:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\delta=+0} \int_0^1 g(y)\, K(\delta, y)\, dy = \lim\limits_{\delta=+0} f(\delta) \\ \lim\limits_{\delta=+0} \int_0^1 g(y) K(1-\delta, y)\, dy = \lim\limits_{\delta=+0} f(1-\delta) \end{array}\right\} (= f(0) = f(1) = 0).$$

Daher können wir schließlich die erste Gleichung (44) in die zweite einsetzen, und erhalten für irgend ein x $(0 < x < 1)$, und ein beliebiges einmal stetig differenzierbares $g(x)$:

$$g(x) = \int_0^1 \int_0^1 g(z)\, K(y,z)\, K(y,x)\, dz\, dy.$$

Ein Gesetz derselben Art entsteht auch, wenn man, statt von der Form (C) und (C‴) der Eigenfunktionen $U_\nu(x)$ und $V_\nu(x)$ auszugehen, die Form (C′) für $U_\nu(x)$, (C″) für $V_\nu(x)$ benützt, also den $U_\nu(x)$ und damit $f(x)$ die feste Nullstelle $x = 0$, den $V_\nu(x)$ und $g(x)$ die Nullstelle $x = 1$ vorschreibt. Andere Kombinationen der vier Typen von Eigenfunktionen führen, wie sich zeigen läßt, mittels dieser Methode auf kein Reziprozitätsgesetz.

§ 8. Der Fall der periodischen Randbedingungen.

Das in § 7 hergeleitete System (44), zu dem wir durch die Entwicklung einer in gewissem Grade willkürlichen Funktion nach Sturm-Liouvilleschen, d. h. Randbedingungen (8) erfüllenden, Eigenfunktionen gelangten, hat den Nachteil, daß die dargestellten Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ eine oder zwei feste Nullstellen haben müssen. Dies wird vermieden, wenn wir als Greensche Rand-

bedingungen[1] für die Eigenfunktionen die folgenden vorschreiben:

$$(45)\quad u(\lambda^2, 0) = u(\lambda^2, 1),\quad \left(\frac{d}{dx} u(\lambda^2, x)\right)_{x=0} = \left(\frac{d}{dx} u(\lambda^2, x)\right)_{x=1}.$$

Durch Rechnungen, die denen der §§ 2—5 ganz parallel gehen, erhalten wir dann die für hinreichend große n gültigen asymptotischen Darstellungen der Eigenwerte und Eigenfunktionen:

$$\begin{cases} \lambda_{2\nu-1} = 2\nu\pi - \frac{\gamma}{2\nu\pi} + \frac{\psi}{\nu^2}, \\ \lambda_{2\nu} \quad = 2\nu\pi - \frac{\gamma}{2\nu\pi} + \frac{\psi}{\nu^2}. \end{cases}$$

$$(46)\quad \begin{cases} U_{2\nu-1}(x) = \cos 2\nu\pi x + \frac{P(x)}{2\nu} \sin 2\nu\pi x + \frac{\psi}{\nu^2}, \\ U_{2\nu}\quad (x) = \sin 2\nu\pi x - \frac{P(x)}{2\nu} \cos 2\nu\pi x + \frac{\psi}{\nu^2}. \end{cases}$$

$$P(x) = \frac{\gamma x - \frac{1}{2}\int_0^x p(z)\,dz}{\pi},$$

$$\gamma = \tfrac{1}{2}\int_0^1 p(z)\,dz.$$

Die Eigenwerte $\lambda_{2\nu-1}$ und $\lambda_{2\nu}$ fallen im allgemeinen nicht zusammen, sondern unterscheiden sich in den Gliedern der Ordnung $\frac{1}{\nu^2}$. Die $U_\nu(x)$ sind so normiert, daß

$$(47)\quad \begin{cases} \int_0^1 U_\mu(x)\, U_\nu(x)\,dx = 0 \quad (\mu \neq \nu), \\ \int_0^1 \left(U_\mu(x)\right)^2 dx = \tfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ist nun $g(x)$ eine stetige und einmal stetig differenzierbare Funktion, deren Randwerte die Bedingungen:

$$g(0) = g(1), \qquad g'(0) = g'(1)$$

erfüllen, so kann es gleichmäßig im ganzen Intervall $0 \leq x < 1$ in eine Reihe:

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left(a_{2\nu-1} U_{2\nu-1}(x) + a_{2\nu} U_{2\nu}(x)\right)$$

entwickelt werden, und es ist nach (47):

$$(48)\quad \begin{cases} a_{2\nu-1} = 2\int_0^1 g(y)\, U_{2\nu-1}(y)\,dy, \\ a_{2\nu}\quad = 2\int_0^1 g(y)\, U_{2\nu}\quad (y)\,dy. \end{cases}$$

[1] Siehe die Anm. S. 24.

Bilden wir jetzt:

$$(49) \qquad j_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \left(- a_{2\nu} U_{2\nu-1}(x) + a_{2\nu-1} U_{2\nu}(x) \right),$$

so ist dies nach (48):

$$j_n(x) = \int_0^1 g(y) K_n(x, y)\, dy,$$

$$K_n(x, y) = 2 \sum_{\nu=1}^{n} \left[U_{2\nu}(x) U_{2\nu-1}(y) - U_{2\nu-1}(x) U_{2\nu}(y) \right],$$

nach der Darstellung (46):

$$\begin{aligned}
K_n(x, y) = {} & 2 \sum_{\nu=1}^{n} \left[\sin 2\nu\pi x - \frac{P(x)}{2\nu} \cos 2\nu\pi x + \frac{\psi}{\nu^2} \right] \cdot \\
& \cdot \left[\cos 2\nu\pi y + \frac{P(y)}{2\nu} \sin 2\nu\pi y + \frac{\psi}{\nu^2} \right] - \\
& - 2 \sum_{\nu=1}^{n} \left[\cos 2\nu\pi x + \frac{P(x)}{2\nu} \sin 2\nu\pi x + \frac{\psi}{\nu^2} \right] \cdot \\
& \cdot \left[\sin 2\nu\pi y - \frac{P(y)}{2\nu} \cos 2\nu\pi y + \frac{\psi}{\nu^2} \right] = \\
= {} & 2 \sum_{\nu=1}^{n} \sin 2\nu\pi (x - y) + \\
& + 2 \left[P(y) - P(x) \right] \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos 2\nu\pi (x-y)}{2\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\psi_\nu}{\nu^2}.
\end{aligned}$$

Die Formeln des § 1 ergeben:

$$\begin{aligned}
K_n(x, y) = {} & \operatorname{cotg} \pi (x-y) [1 - \cos 2n\pi (x-y)] + \sin 2n\pi (x-y) + \\
& + \frac{\pi}{2} \left[P(x) - P(y) \right]^2 \int_{\frac{1}{2}}^{2|x-y|} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} z (1 - \cos n\pi z) dz + \\
& + \frac{\pi}{2} \left[P(x) - P(y) \right] \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{2|x-y|} \sin n\pi z\, dz - \\
& - \tfrac{1}{2} \left[P(x) - P(y) \right] \cdot \sum_{\mu=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^\mu}{\mu} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\psi_\nu}{\nu^2}.
\end{aligned}$$

Die Summanden der letzten Zeile liefern in bekannter Weise $s_1(x, y) + \varepsilon_1(n; x, y)$; die der zweiten und dritten Zeile nach der Einführung von $\varphi(z) = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} z - \frac{2}{\pi z}$:

$$s_2(x, y) + \varepsilon_2(n; x, y) - [P(y) - P(x)] \int_{\frac{1}{2}}^{2|x-y|} \frac{1 - \cos n\pi z}{z} dz =$$

$$= s_3(x, y) + \varepsilon_3(n; x, y) + [P(x) - P(y)] \log |x - y|,$$

da

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2|x-y|} \frac{\cos n\pi z}{z} dz = \int_{\frac{n\pi}{2}}^{2n\pi|x-y|} \frac{\cos u}{u} du$$

für $\lim n = +\infty$ beliebig klein wird, auch wenn $x - y$ sich der Null nähert.

Weiter ist $\int_0^1 g(y) \sin 2n\pi(x - y)\, dy = \varepsilon_4(n; x, y)$, und ebenso wie im § 7:

$$\int_0^1 g(y) \operatorname{cotg} \pi(x - y) [1 - \cos 2n\pi(x - y)] =$$

$$= \int_0^1 g(y) \operatorname{cotg} \pi(x - y)\, dy + \varepsilon_5(n; x, y),$$

wenn das Integral rechts als Hauptwert genommen wird. Wir dürfen aber jetzt, wie die Herleitung zeigt, mit x bis an die Randpunkte $x = 0$ und $x = 1$ herangehen, wenn wir nur in den (41) entsprechenden Integralen:

$$g(-z) = g(1 - z), \qquad g(1 + z) = g(z)$$

setzen, was ja jetzt ohne Unterbrechung der Stetigkeit möglich ist. Entsprechend ist auch der Hauptwert von $\int_0^1 g(y) \operatorname{cotg} \pi(x - y)\, dy$ zu verstehen, wenn x in die Randpunkte rückt. Es ergibt sich also:

(50) $$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x) = \int_0^1 g(y) [\operatorname{cotg} \pi(x - y) + S(x, y)]\, dy,$$

da $[P(x) - P(y)] \log |x - y|$ eine stetige Funktion ist.

Aus der Existenz von $f(x)$ folgt nach (49):

$$\begin{cases} a_{2\nu-1} = 2 \int_0^1 f(y) U_{2\nu}(y)\, dy, \\ a_{2\nu} = -2 \int_0^1 f(y) U_{2\nu-1}(y)\, dy, \end{cases}$$

also:

$$g_n(x) = \int_0^1 f(y) K_n(y, x)\, dy,$$

und daraus durch analoge Rechnungen:

$$(51) \qquad g(x) = \lim_{n=\infty} g_n(x) = \int_0^1 f(y)\, K(y, x)\, dy,$$

$$K(x, y) = \operatorname{cotg} \pi (x - y) + S(x, y).$$

Das gewöhnliche (Hilbertsche) Reziprozitätsgesetz entsteht daraus durch:

$$p(x) \equiv 0, \qquad P(x) \equiv 0,$$

$$U_{2\nu-1}(x) = \cos 2\nu\pi x, \qquad U_{2\nu}(x) = \sin 2\nu\pi x,$$

$$K_n(x, y) = \operatorname{cotg} \pi (x - y)\,[1 - \cos 2n\pi (x - y)] + \sin 2n\pi (x - y),$$

$$K(x, y) = \operatorname{cotg} \pi (x - y):$$

$$\begin{cases} f(x) = \int_0^1 g(y) \operatorname{cotg} \pi (x - y)\, dy, \\ g(x) = -\int_0^1 f(y) \operatorname{cotg} \pi (x - y)\, dy. \end{cases}$$

Kellogg[1] hat gezeigt, wie sich die Stetigkeitsbeschränkungen von $f(x)$ und $g(x)$ verringern lassen, so daß insbesondere die Bedingungen

$$f(0) = f(1), \qquad f'(0) = f'(1),$$

und die entsprechenden für $g(x)$ wegfallen können.

[1] a. a. O., (Math. Ann.) S. 446 ff.

II. Kapitel.

Unstetigkeiten in der Differentialgleichung der Greenschen Funktion.

§ 1. Definition der Greenschen Funktion, der Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Es sei wieder ein sich selbst adjungierter Differentialausdruck zweiter Ordnung vorgegeben:

$$L(u) = \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + q(x)\, u(x).$$

Realität von $q(x)$ verlangen wir nicht mehr, vielmehr sei $q(x)$ eine eindeutige, reguläre Funktion ihres auf das reelle Intervall $0 < x \leq 1$ beschränkten Arguments, und daher auch absolut integrierbar.

Mit $u_1(\lambda^2, x)$ und $u_2(\lambda^2, x)$ bezeichnen wir diejenigen beiden zweimal stetig differenzierbaren Lösungen der homogenen Gleichung

$$L(u) + \lambda^2 u = 0, \tag{1}$$

für die

$$\begin{cases} u_1(\lambda^2, 0) = 1, & \left[\frac{d}{dx} u_1(\lambda^2, x)\right]_{x=0} = 0; \\ u_2(\lambda^2, 0) = 0, & \left[\frac{d}{dx} u_2(\lambda^2, x)\right]_{x=0} = 1 \end{cases} \tag{2}$$

ist. Ferner werden wir die Funktion

$$w(\lambda^2, x, y) = \begin{vmatrix} u_1(\lambda^2, x) & u_1(\lambda^2, y) \\ u_2(\lambda^2, x) & u_2(\lambda^2, y) \end{vmatrix} \tag{3}$$

gebrauchen; sie befriedigt also mit den Argumenten x und y die Gleichung (1), ferner gilt nach (3) und (2):

$$\begin{cases} w(\lambda^2, x, x) = 0, \\ -\left[\frac{\partial}{\partial x} w(\lambda^2, x, y)\right]_{x=y} = \left[\frac{\partial}{\partial y} w(\lambda^2, x, y)\right]_{y=x} = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Bedeutet ξ irgend einen von 0 und 1 verschiedenen Punkt des Intervalls, so definieren wir unsere Greensche Funktion $V(\lambda^2, x, \xi)$ zunächst für $x < \xi$ als Lösung (vermöge ihres Arguments x) der inhomogenen Gleichung:

$$L(V) + \lambda^2 V = \operatorname{cotg} \pi (x - \xi). \tag{5}$$

Es wird also:

$$\left\{ \begin{aligned} V(\lambda^2, x, \xi) &= c_1(\lambda^2)\, u_1(\lambda^2, x) + c_2(\lambda^2)\, u_2(\lambda^2, x) - \\ &\quad - \int_0^x w(\lambda^2, x, z) \operatorname{cotg} \pi (z - \xi)\, dz \qquad (x < \xi). \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Rückt x an ξ heran, so bleibt $V(\lambda^2, \xi, \xi)$ selbst endlich, während $\frac{d}{dx} V(\lambda^2, x, \xi)$ logarithmisch unendlich wird; wir setzen daher $V(\lambda^2, x, \xi)$ durch folgende Forderungen eindeutig in das Gebiet $\xi \leqq x \leqq 1$ fort:

a) es soll der Gleichung (5) genügen;

b) es soll $\lim_{\varepsilon = +0} V(\lambda^2, \xi - \varepsilon, \xi) = \lim_{\varepsilon = +0} V(\lambda^2, \xi + \varepsilon, \xi)$ sein;

c) es soll

$$\lim_{\varepsilon = +0} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} V(\lambda^2, x, \xi) \right]_{x = \xi - \varepsilon} - \left[\frac{\partial}{\partial x} V(\lambda^2, x, \xi) \right]_{x = \xi + \varepsilon} \right\} = 0 \text{ sein.}$$

Daher kann die Formel (6) auch für $\xi \leqq x \leqq 1$ bestehen bleiben, wenn wir nur für $x > \xi$ das Integral als Cauchyschen Hauptwert nehmen.

Endlich hat $V(\lambda^2, x, \xi)$ noch zwei Greensche[1] Randbedingungen zu erfüllen, als deren einfachste

$$V(\lambda^2, 0, \xi) = 0, \qquad V(\lambda^2, 1, \xi) = 0 \tag{7}$$

dienen mögen. Daher ist

$$c_1(\lambda^2) = 0, \qquad c_2(\lambda^2) = \frac{\int_0^1 w(\lambda^2, 1, z) \operatorname{cotg} \pi (z - \xi)\, dz}{u_2(\lambda^2, 1)};$$

$$\left\{ \begin{aligned} &V(\lambda^2, x, \xi) = \\ &= \frac{u_2(\lambda^2, x) \int_0^1 w(\lambda^2, 1, z) \operatorname{cotg} \pi (z - \xi)\, dz - u_2(\lambda^2, 1) \int_0^x w(\lambda^2, x, z) \operatorname{cotg} \pi (z - \xi)\, dz}{u_2(\lambda^2, 1)}. \end{aligned} \right.$$

[1] Ein System von linearen Randbedingungen heißt nach Haupt (Würzb. Diss. 1911, S. 6f.) ein Greensches, wenn irgend zwei ihm genügende Funktionen $A(x)$, $B(x)$ den Ausdruck

$$\left[A(x) \frac{dB(x)}{dx} - B(x) \frac{dA(x)}{dx} \right]_{x=0}^{x=1}$$

zu Null machen.

Durch eine kurze Rechnung folgt:

$$(8)\quad V(\lambda^2, x, \xi) = \frac{w(\lambda^2,1,x)\cdot\int_0^x u_2(\lambda^2,z)\cot g\,\pi(z-\xi)\,dz + u_2(\lambda^2,x)\cdot\int_x^1 w(\lambda^2,1,z)\cot g\,\pi(z-\xi)\,dz}{u_2(\lambda^2,1)}$$

oder, durch partielle Integration:

$$(9)\quad V(\lambda^2, x, \xi) = \frac{w(\lambda^2,1,x)\cdot\int_0^x \frac{d}{dz}u_2(\lambda^2,z)\cdot\log\sin\pi\,z-\xi\,dz + u_2(\lambda^2,x)\cdot\int_x^1 \frac{\partial}{\partial z}w(\lambda^2,1,z)\cdot\log\sin\pi\,z-\xi\,dz}{-\pi\,u_2(\lambda^2,1)}$$

In dieser Form existieren beide Integrale ohne weiteres für $x \lessgtr \xi$.

Die Pole λ^2 von $V(\lambda^2, x, \xi)$ sind nach (8) identisch mit den Nullstellen von

$$N(\lambda^2) = -\pi\,u_2(\lambda^2, 1).$$

Nach (2) stellen sie zugleich die Eigenwerte dar, für welche die Gleichung (5) eine Eigenfunktion besitzt, d. h. eine zweimal stetig differenzierbare Lösung, die, ebenso wie die Greensche Funktion, für $x = 0$ und $x = 1$ verschwindet.

§ 2. Asymptotische Darstellung der Greenschen Funktion für große $|\lambda|$.

Zur asymptotischen Darstellung von $V(\lambda^2, x, \xi)$ verfahren wir[1] ebenso wie in den §§ 2—4 des ersten Kapitels; doch ist hier zu berücksichtigen, daß die Eigenwerte λ^2 nicht mehr reell sein werden. Ist

$$\lambda = \alpha + \beta i$$

(α und β reell), so setzen wir fest, daß im folgenden überall, wo ein doppeltes Vorzeichen steht, das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\\text{untere}\end{matrix}\right\}$ Zeichen gelten soll, je nachdem $\left\{\begin{matrix}\beta>0\\\beta<0\end{matrix}\right\}$ ist. Wegen $\frac{d^2u_2(\lambda^2,x)}{dx^2} + \lambda^2 u_2(\lambda^2,x) = -q(x)\,u_2(\lambda^2,x)$ besteht die Gleichung:

$$u_2(\lambda^2, x) = \gamma_1 e^{\lambda i x} + \gamma_2 e^{-\lambda i x} - \frac{1}{2\lambda i}\int_0^x [e^{\lambda i(x-z)} - e^{-\lambda i(x-z)}]\,q(z)\,u_2(\lambda^2, z)\,dz,$$

[1] Vergl. Hilb, Math. Ann. 71 (1911), S. 82 ff.

und die Normierung (2) verlangt:

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\lambda i}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{2\lambda i},$$

$$(10) \qquad \frac{\lambda u_2(\lambda^2, x)}{e^{\mp \lambda i x}} = \mp \frac{\{1 - e^{\pm 2\lambda i x}\}}{2i} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2\lambda i} \int_0^x \{1 - e^{\pm 2\lambda i (x-z)}\} q(z) \frac{\lambda u_2(\lambda^2, z)}{e^{\mp \lambda i z}} dz.$$

Nach der Verabredung über das doppelte Vorzeichen übersteigen die Ausdrücke in geschweiften Klammern nicht den Betrag 2; somit wird, wenn $M = M(\lambda)$ das Maximum von $\left| \frac{\lambda u_2(\lambda^2, x)}{e^{\mp \lambda i x}} \right|$ für $0 \leqq x \leqq 1$ bezeichnet:

$$M \leqq 1 + \frac{1}{2|\lambda|} \int_0^1 2|q(z)| M \, dz, \quad \text{und daraus:}$$

$M <$ const. für alle hinreichend großen $|\lambda|$.

Dies werde in (10) eingesetzt:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\lambda u_2(\lambda^2, x)}{e^{\mp \lambda i x}} = \mp \dfrac{1 - e^{\pm 2\lambda i x}}{2i} + \dfrac{\psi}{\lambda} \quad \text{oder} \\ \\ u_2(\lambda^2, x) = \dfrac{e^{\lambda i x} - e^{-\lambda i x}}{2\lambda i} + e^{\mp \lambda i x} \cdot \dfrac{\psi}{\lambda^2}. \end{array} \right.$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\lambda N(\lambda^2)}{e^{\mp \lambda i}} = \pm \pi \dfrac{1 - e^{\pm 2\lambda i}}{2i} + \dfrac{\psi}{\lambda} \quad \text{oder} \\ \\ N(\lambda^2) = -\pi \dfrac{e^{\lambda i} - e^{-\lambda i}}{2\lambda i} + e^{\mp \lambda i} \cdot \dfrac{\psi}{\lambda^2}. \end{array} \right.$$

Durch Differentiation von (9) und dieselbe Abschätzung folgt:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\frac{d}{dx} u_2(\lambda^2, x)}{e^{\mp \lambda i x}} = \dfrac{1 + e^{\pm 2\lambda i x}}{2} + \dfrac{\psi}{\lambda} \quad \text{oder} \\ \\ \dfrac{d}{dx} u_2(\lambda^2, x) = \dfrac{e^{\lambda i x} + e^{-\lambda i x}}{2} + e^{\mp \lambda i x} \cdot \dfrac{\psi}{\lambda}. \end{array} \right.$$

Endlich geht $w(\lambda^2, x, y)$ durch die Substitution $x - y = \xi$ aus $u_2(\lambda^2, \xi)$ hervor, also ist

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\lambda w(\lambda^2, x, y)}{e^{\mp \lambda i (x-y)}} = \pm \dfrac{1 - e^{\pm 2\lambda i (x-y)}}{2i} + \dfrac{\psi}{\lambda} \quad \text{oder} \\ \\ w(\lambda^2, x, y) = \dfrac{-e^{\lambda i (x-y)} + e^{-\lambda i (x-y)}}{2\lambda i} + e^{\mp \lambda i (x-y)} \cdot \dfrac{\psi}{\lambda^2}. \end{array} \right.$$

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y} w(\lambda^2, x, y) \\ \hline e^{\mp \lambda i (x-y)} \end{cases} = \frac{1 + e^{\pm 2\lambda i (x-y)}}{2} + \frac{\psi}{\lambda} \qquad \text{oder}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} w(\lambda^2, x, y) = \frac{e^{\lambda i (x-y)} + e^{-\lambda i (x-y)}}{2} + e^{\mp \lambda i (x-y)} \cdot \frac{\psi}{\lambda}.$$

Je nachdem wir also in (11)—(15) die oberen oder die unteren Formeln benützen, gibt (8) die beiden folgenden asymptotischen Darstellungen von $V(\lambda^2, x, \xi)$:

$$(16)\quad \begin{cases} \left[\pm \pi \frac{1 - e^{+2\lambda i}}{2i} + \frac{\psi}{\lambda}\right] \cdot V(\lambda^2, x, \xi) = \\ = \left[\pm \frac{1 - e^{\pm 2\lambda i (1-x)}}{2i} + \frac{\psi}{\lambda}\right] \cdot \\ \cdot \int_0^x \left[\frac{1 + e^{\pm 2\lambda i z}}{2} + \frac{\psi}{\lambda}\right] \cdot e^{\pm \lambda i (x-z)} \log \sin \pi |z - \xi| \, dz + \\ + \left[\mp \frac{1 - e^{\pm 2\lambda i x}}{2i} + \frac{\psi}{\lambda}\right] \cdot \\ \cdot \int_x^1 \left[\frac{1 + e^{\pm 2\lambda i (1-z)}}{2} + \frac{\psi}{\lambda}\right] \cdot e^{\pm \lambda i (z-x)} \log \sin \pi |z - \xi| \, dz; \end{cases}$$

$$(17)\quad \begin{cases} \left[-\pi \frac{e^{\lambda i} - e^{-\lambda i}}{2\lambda i} + R_5\right] \cdot V(\lambda^2, x, \xi) = \\ = \left[\frac{-e^{\lambda i (1-x)} + e^{-\lambda i (1-x)}}{2\lambda i} + R_1\right] \cdot \\ \cdot \int_0^x \left[\frac{e^{\lambda i z} + e^{-\lambda i z}}{2} + R_2\right] \log \sin \pi |z - \xi| \, dz + \\ + \left[\frac{e^{\lambda i x} - e^{-\lambda i x}}{2\lambda i} + R_3\right] \cdot \\ \cdot \int_x^1 \left[\frac{e^{\lambda i (1-z)} + e^{-\lambda i (1-z)}}{2} + R_4\right] \log \sin \pi |z - \xi| \, dz, \end{cases}$$

wo die Restglieder R_j $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ die aus (11) (15) abzulesenden Werte haben. Wir bemerken noch, daß in (16) die Exponenten von e alle die Form $\pm \mathfrak{p} \lambda i$ $(\mathfrak{p} > 0)$ haben, so daß $|e^{\pm \mathfrak{p} \lambda i}| \leqq 1$ ist.

§ 3. Partialbruchzerlegung der Greenschen Funktion.

Die Nullstellen λ_ν des Nenners $N(\lambda^2)$, deren Quadrate uns die Pole von $V(\lambda^2, x, \xi)$ liefern, sind[1] folgendermaßen über die komplexe λ-Ebene verteilt: Sie nähern sich unbegrenzt den Nullstellen von $\sin\lambda$:

$$\lambda_\nu = -\lambda_{-\nu} = \nu\pi + \frac{\psi}{\nu}, \tag{18}$$

so daß speziell ihre imaginären Koordinaten immer kleiner werden; ferner sind sie, zum mindesten von einem gewissen Betrag an, alle nur einfach. Legen wir also in die λ-Ebene Quadrate Q_ν mit dem Mittelpunkt $(0, 0)$, den Seiten parallel den Koordinatenachsen und den halben Seitenlängen $\nu - \frac{1}{2}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, so kommen von einem gewissen ν an die Ränder dieser Quadrate den λ_ν nicht näher als auf eine feste, endliche Strecke, und Q_n enthält die Nullstellen λ_ν $(\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n)$ in seinem Innern. Hierdurch rechtfertigt sich die Numerierung (18).

Bedeutet nun λ irgend einen endlichen Wert, dessen Quadrat mit keinem Eigenwert übereinstimmt, so integrieren wir $\frac{V(\mu^2, x, \xi)}{\mu - \lambda}$ über den Rand von Q_n, wobei n so hoch gewählt sei, daß λ im Innern von Q_n liegt. Nach dem Cauchyschen Satz kommt so:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(Q_n)} \frac{V(\mu^2, x, \xi)}{\mu - \lambda}\, d\mu = V(\lambda^2, x, \xi) + \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{r_\nu(x,\xi)}{\lambda_\nu - \lambda} + \frac{r_{-\nu}(x,\xi)}{\lambda_{-\nu} - \lambda}\right);^2$$

hierin stellen $r_\nu(x, \xi)$ und $r_{-\nu}(x, \xi)$ die Residuen von $V(\mu^2, x, \xi)$ für $\mu = \lambda_\nu$ bezw. $\mu = \lambda_{-\nu}$ dar. Nun folgt aus (8) nach bekannter Regel, da für einen Eigenwert nach (2) und (3) $w(\lambda_\nu^2, 1, x) = u_1(\lambda_\nu^2, 1)\, u_2(\lambda_\nu^2, x)$ ist:

$$r_\nu(x, \xi) = \frac{u_1(\lambda_\nu^2, 1)\, u_2(\lambda_\nu^2, x)\int_0^1 u_2(\lambda_\nu^2, z)\cot g\,\pi(z-\xi)\,dz}{\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\, u_2(\lambda^2, 1)\right)_{\lambda=\lambda_\nu}},$$

$$r_{-\nu}(x, \xi) = -r_\nu(x, \xi);$$

[1] Vergl. Hilb, Math. Ann. 71 (1911), S. 83 f.

[2] Hat $V(\lambda^2, x, \xi)$ mehrfache Pole, so ist diese Gleichung leicht zu modifizieren; doch kann ja diese Besonderheit nur endlich oft vorkommen, also die folgenden Konvergenzbetrachtungen nicht beeinflussen.

also, wenn wir zur Abkürzung:

$$r_\nu(x,\xi) = -\frac{1}{2\lambda_\nu}\varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(\xi) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$(19)\quad \begin{cases} \varphi_\nu(x) = \dfrac{2\lambda_\nu u_1(\lambda^2_\nu, 1)}{\left(\frac{\partial}{\partial\lambda} u_2(\lambda^2, 1)\right)_{\lambda=\lambda_\nu}} \cdot u_2(\lambda_\nu{}^2, x), \\ \psi_\nu(\xi) = -\int_0^1 u_2(\lambda_\nu{}^2, z)\operatorname{cotg}\pi(z-\xi)\,dz \end{cases}$$

setzen:

$$(20)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{(Q_n)} \frac{V(\mu^2, x, \xi)}{\mu - \lambda}\,d\mu = V(\lambda^2, x, \xi) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(\xi)}{\lambda^2_\nu - \lambda^2}.$$

Wir werden nun im Rest dieses Paragraphen beweisen, daß, wenn ϑ ein beliebig vorgegebener, positiver echter Bruch ist, eine ganze positive Zahl n_0 und eine von μ, x und ξ unabhängige positive Constante C gefunden werden können, so daß auf dem ganzen Rand von Q_n $(n \geqq n_0)$

$$(21)\quad |V(\mu^2, x, \xi)| < \frac{C}{|\mu|^\vartheta}$$

wird[1]. Ist (21) bewiesen, so folgt sofort aus (20), daß das Integral zur Linken mit wachsendem n beliebig klein wird; denn der Betrag des Integranden verhält sich wie $\frac{1}{n^{1+\vartheta}}$, während die Länge des Integrationswegs nur wie n wächst. Es konvergiert also für $\lim n = \infty$ die rechtsstehende Summe, und es wird:

$$(22)\quad V(\lambda^2, x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(\xi)}{\lambda^2_\nu - \lambda^2}.$$

Zum Beweis der Behauptung (21) verwenden wir die asymptotischen Darstellungen (16) und (17) von $V(\lambda^2, x, \xi)$ und bedenken, daß der Nenner von (16) auf den Rändern von Q_n $(n > n_0)$ dem Betrag nach größer als eine feste, endliche Größe bleibt. Weiter sind die Beträge der beiden Faktoren vor den Integralzeichen für alle hinreichend großen λ kleiner als feste Zahlen, und endlich:

$$\left|\int_0^x \frac{\psi}{\lambda} e^{\pm\lambda i(x-z)} \log\sin\pi|z-\xi|\,dz\right| < \frac{\text{const.}}{|\lambda|}\int_0^1 -\log\sin\pi z\,dz = \frac{\text{const.}}{|\lambda|}.$$

[1] Vergl. Picard, Traité d'Analyse, II, S. 160 ff.

Unsere Behauptung ist also für $V(\lambda^2, x, \xi)$ bewiesen, wenn sie es für

$$\int_0^x \left[1 + e^{\mp 2\lambda i z}\right] e^{\mp \lambda i (x-z)} \log \sin \pi |z - \xi| \, dz \text{ und}$$

$$\int_x^1 \left[1 + e^{\mp 2\lambda i (1-z)}\right] e^{\mp \lambda i (z-x)} \log \sin \pi |z - \xi| \, dz \text{ ist.}$$

Da das zweite dieser Integrale durch

$$1 - x = \bar{x}, \; 1 - z = \bar{z}, \; 1 - \xi = \bar{\xi}$$

in ein dem ersten ganz analoges übergeht, so genügt es, zu zeigen:

$$(23) \qquad \left| e^{\mp \lambda i x} \cdot \int_0^x \left[e^{\lambda i z} + e^{-\lambda i z}\right] \log \sin \pi |z - \xi| \, dz \right| < \frac{\text{const.}}{|\lambda|^{\vartheta}}$$

für hinreichend große $|\lambda|$.

Nun ist

$$e^{\lambda i z} + e^{-\lambda i z} = 2 \cos \lambda z = 2 \cos (\alpha + \beta i) z =$$
$$= 2 \cos \alpha z \, \mathfrak{Cof} \, \beta z - 2 i \sin \alpha z \, \mathfrak{Sin} \, \beta z,$$

so daß das Integral in (23) die folgenden Koordinaten besitzt:

$$\tfrac{1}{2} \int_0^x \cos \alpha z \, \mathfrak{Cof} \, \beta z \log \sin \pi |z - \xi| \, dz \text{ und}$$

$$-\tfrac{1}{2} \int_0^x \sin \alpha z \, \mathfrak{Sin} \, \beta z \log \sin \pi |z - \xi| \, dz;$$

wir haben daher die beiden, nur noch reelle Größen enthaltenden, Ungleichungen

$$(24) \begin{cases} \left| e^{\mp \beta x} \int_0^x \cos \alpha z \, \mathfrak{Cof} \, \beta z \log \sin \pi |z - \xi| \, dz \right| < \frac{\text{const.}}{|\lambda|^{\vartheta}}, \\ \left| e^{\mp \beta x} \int_0^x \sin \alpha z \, \mathfrak{Sin} \, \beta z \log \sin \pi |z - \xi| \, dz \right| < \frac{\text{const.}}{|\lambda|^{\vartheta}} \end{cases}$$

zu beweisen. Der Beweis geht für beide Behauptungen ganz parallel; wir führen daher nur den der ersten Formel (24) durch.

Die Funktion $|t|^{\eta} \log \sin \pi |t|$, wo wir

$$(25) \qquad \eta = 1 - \vartheta$$

geschrieben haben, ist für $-1 \leq t \leq 1$ endlich, stetig und nur mit endlich vielen Extrema versehen. Daher ergibt der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$\int_0^x \frac{\cos\alpha z \,\mathfrak{Cof}\,\beta z}{|z-\xi|^\eta} \cdot |z-\xi|^{\eta_1} \log\sin\pi|z-\xi|\, dz =$$

$$= \sum_{(h)} |c_h - \xi|^{\eta_1} \log\sin\pi|c_h - \xi| \cdot \int_{a_h}^{b_h} \frac{\cos\alpha z \,\mathfrak{Cof}\,\beta z}{|z-\xi|^\eta}\, dz,$$

wobei die Zahl der Summanden von λ, x, ξ unabhängig, jeder Faktor vor dem Integralzeichen unter einer festen Grenze gelegen ist, und a_h, b_h gewisse Zahlen zwischen 0 und x bedeuten. (24) ist also abermals reduziert auf die Behauptung:

$$(26) \qquad e^{\mp\beta x} \int_a^b \frac{\cos\alpha z \,\mathfrak{Cof}\,\beta z}{|z-\xi|^\eta}\, dz \Big| < \frac{\text{const.}}{|\lambda|^{1-\eta}} \qquad (0 \leqq a < b \leqq x).$$

Ist $\lambda = |\lambda| e^{i\varphi}$, so geht das Integral von (26) durch die Substitution $(z-\xi)|\lambda| = w$ über in

$$\frac{1}{|\lambda|^{1-\eta_1}} \int_{(a-\xi)|\lambda|}^{(b-\xi)|\lambda|} \cos\alpha z \frac{\mathfrak{Cof}\,\beta z}{|w|^\eta}\, dw$$

(für z ist sein Ausdruck in w eingesetzt zu denken). Der Integrationsweg ist ein Stück der reellen w-Achse, und wird im allgemeinsten Fall durch den Einheitskreis in 3 Teile zerschnitten: von $(a-\xi)|\lambda|$ bis -1, von -1 bis $+1$, von $+1$ bis $(b-\xi)|\lambda|$. Wir zeigen, daß für jeden der 3 Teile (wenn er nicht überhaupt wegfällt) $\left|e^{\mp\beta x} \int \frac{\cos\alpha z \,\mathfrak{Cof}\,\beta z}{w_1^{\eta_1}} dw\right| < \text{const.}$, wodurch ja (26) bewiesen sein wird.

I. $\frac{1}{w^{\eta_1}}$ nimmt im ganzen Intervall monoton zu und hat für $w = -1$ den Wert 1; daher gibt der zweite Mittelwertsatz, wenn w_1 ein gewisser Punkt im ersten Intervall ist:

$$\int_{(a-\xi)|\lambda|}^{-1} \frac{\cos\alpha z \,\mathfrak{Cof}\,\beta z}{w^\eta}\, dw = \int_{w_1}^{-1} \cos\alpha z \,\mathfrak{Cof}\,\beta z\, dw =$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{w_1}^{-1} [\cos(\alpha+\beta i)z + \cos(\alpha-\beta i)z]\, dw =$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{w_1}^{-1} [\cos(|\lambda| z e^{\varphi i}) + \cos(|\lambda| z e^{-\varphi i})]\, dw =$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{w_1}^{-1} \cos[(w+|\lambda|\xi)e^{\varphi i}]\, dw + \tfrac{1}{2} \int_{w_1}^{-1} \cos[(w+|\lambda|\xi)e^{-\varphi i}]\, dw =$$

$$= \frac{1}{2e^{\varphi i}} \left\{ \sin[(w+|\lambda|\xi)e^{\varphi i}] \right\}_{-1}^{w_1} + \frac{1}{2e^{-\varphi i}} \left\{ \sin[(w+|\lambda|\xi)] e^{-\varphi i} \right\}_{-1}^{w_1} =$$

$$= \frac{1}{2e^{\varphi i}} \left\{ \sin(\alpha+\beta i)z \right\}_{w=-1}^{w=w_1} + \frac{1}{2e^{-\varphi i}} \left\{ \sin(\alpha - \beta i)z \right\}_{w=-1}^{w=w_1},$$

daher:

$$e^{-\beta x}\left|\int_{(a-\xi)\lambda}^{-1}\frac{\cos\alpha z\,\mathfrak{Coj}\beta z}{w^{\eta}}\,dw\right| \leqq$$

$$\leqq \tfrac{1}{2}\,e^{\mp\beta x}\Big[\left|\sin(\alpha+\beta i)z\right|+\left|\sin(\alpha-\beta i)z\right|\Big]_{w=w_1} +$$

$$+\ \tfrac{1}{2}\,e^{\mp\beta x}\Big[\left|\sin(\alpha+\beta i)z\right|+\left|\sin(\alpha-\beta i)z\right|\Big]_{w=-1}.$$

Nun verhält sich $\sin(\alpha-\beta i)z$ wie $e^{\mp\beta z}$, $\sin(\alpha+\beta i)z$ ebenfalls wie $e^{\pm\beta z}$ (vergl. S. 26), also $e^{\mp\beta x}\left|\int_{(a-\xi)\lambda}^{-1}\frac{\cos\alpha z\,\mathfrak{Coj}\beta z}{w^{\eta}}\,dw\right|$ wie const. $\left[e^{\mp\beta(x-z)}\right]_{w=w_1}$ + const. $\left[e^{\mp\beta(x-z)}\right]_{w=-1}$, d. h. es bleibt unterhalb einer festen Konstanten, da sowohl für $w=w_1$ als für $w=-1$ $x-z$ positiv ist.

II. $$\left|e^{+\beta x}\int_{-1}^{+1}\frac{\cos\alpha z\,\mathfrak{Coj}\beta z}{w^{\eta}}\,dw\right| \leqq \left|e^{+\beta x}\int_{-1}^{-1}\frac{\mathfrak{Coj}\beta z}{w^{\eta}}\,dw\right| =$$

$$=\int_{-1}^{+1}\frac{e^{\mp\beta(x\mp z)}+e^{\mp\beta(x\pm z)}}{2\,w^{\eta}}\,dw \leqq \int_{-1}^{-1}\frac{1}{w^{\eta}}\,dw=\frac{2}{1-\eta}.$$

III. $\frac{1}{w^{\eta}}$ nimmt im ganzen Intervall monoton ab und hat für $w=1$ den Wert 1; daher gibt der zweite Mittelwertsatz, wenn w_3 ein gewisser Punkt im dritten Intervall ist:

$$\int_{(a-\xi)\lambda}^{1}\frac{\cos\alpha z\,\mathfrak{Coj}\beta z}{w^{\eta}}\,dw=\int_{1}^{w_3}\cos\alpha z\,\mathfrak{Coj}\beta z\,dw=$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_{1}^{w_3}\left[\cos(\alpha+\beta i)z+\cos(\alpha-\beta i)z\right]dw=$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_{1}^{w_3}\left[\cos\left(|\lambda|z\,e^{\varphi i}\right)+\cos\left(|\lambda|z\,e^{-\varphi i}\right)\right]dw=$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_{1}^{w_3}\cos\left[(w+\lambda\xi)e^{\varphi i}\right]dw+\tfrac{1}{2}\int_{1}^{w_3}\cos\left[(w+\lambda\xi)e^{-\varphi i}\right]dw=$$

$$=\frac{1}{2e^{\varphi i}}\left\{\sin\left[(w+\lambda\xi)e^{\varphi i}\right]\right\}_{w_3}^{1}+\frac{1}{2e^{-\varphi i}}\left\{\sin\left[(w+\lambda\xi)e^{-\varphi i}\right]\right\}_{w_3}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2e^{\varphi i}}\left\{\sin(\alpha+\beta i)z\right\}_{w=w_3}^{w=1}+\frac{1}{2e^{-\varphi i}}\left\{\sin(\alpha-\beta i)z\right\}_{w=w_3}^{w=1}.$$

daher:

$$e^{\mp\beta x}\left|\int_{i}^{(\nu-\xi)\,|\lambda|}\frac{\cos\alpha z\,\mathfrak{Cof}\,\beta z}{|w|^{\nu}}\,dw\right|<$$

$$\leqq\tfrac{1}{2}\,e^{\mp\beta x}\Big[|\sin(\alpha+\beta i)z|+|\sin(\alpha-\beta i)z|\Big]_{w=1}+$$

$$+\tfrac{1}{2}\,e^{\mp\beta x}\Big[|\sin(\alpha+\beta i)z|+|\sin(\alpha-\beta i)z|\Big]_{w=w_3}\leqq\text{const.},$$

da auch für $w=w_3$ und $w=1$ $x-z$ positiv ist.

Gehen wir jetzt über (26), (24), (23) zurück zu (21), so ist damit die letztere Ungleichung bewiesen; sie gilt, wie der Beweis zeigt, gleichmäßig für x und ξ sowie jeden endlichen Bereich der λ-Ebene, der keine Nullstelle von $N(\lambda^2)$ enthält. Aus (21) folgt sodann in der angegebenen Weise die Richtigkeit der Partialbruchzerlegung (22).

§ 4. Reihenentwicklung einer willkürlichen Funktion.

Die Tauber-Hilbertschen Reziprozitätsformeln

$$(27)\qquad\begin{cases} f(x)=\int_0^1 g(y)\operatorname{cotg}\pi(x-y)\,dy,\\ g(x)=-\int_0^1 f(y)\operatorname{cotg}\pi(x-y)\,dy \end{cases}$$

gelten nach Kellogg[1] für irgend zwei stetige und (bis auf endlich viele Stellen) differenzierbare Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, die überdies

$$(28)\qquad\int_0^1 f(y)\,dy=\int_0^1 g(y)\,dy=0$$

erfüllen. Doch kann (27) von der Bedingung (28) freigemacht werden, indem wir $f(x)$ und $g(x)$ durch $f(x)-\int_0^1 f(y)\,dy$ bezw. $g(x)-\int_0^1 g(y)\,dy$ ersetzen, da ja

$$(29)\qquad\int_0^1\operatorname{cotg}\pi(x-y)\,dy=0$$

ist. So entsteht das allgemeinere Gleichungspaar:

$$(30)\qquad\begin{cases} f(x)-\int_0^1 f(y)\,dy=\int_0^1 g(y)\operatorname{cotg}\pi(x-y)\,dy,\\ g(x)-\int_0^1 g(y)\,dy=-\int_0^1 f(y)\operatorname{cotg}\pi(x-y)\,dy. \end{cases}$$

[1] a. a. O. (Math. Ann.), S. 442 ff.

Wir nehmen nun an, $\lambda^2 = 0$ sei kein Eigenwert des Differentialausdrucks (1) mit den Randbedingungen (7); diese Forderung bedeutet keine wesentliche Einschränkung, da sie stets durch Hinzufügung einer geeigneten reellen Konstanten zu $q(x)$ erfüllt werden kann. $V(0, x, y)$, oder kürzer: $V(x, y)$ existiert daher und genügt mit dem ersten Argument der Gleichung:

$$L(V) = \operatorname{cotg} \pi (x - y). \tag{31}$$

Es sei nun $f(x)$ eine zweimal stetig differenzierbare, den Randbedingungen (7) unterworfene Funktion; wir setzen

$$-L\left(f(x)\right) = F(x). \tag{32}$$

Die auf irgend zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen $A(x)$, $B(x)$ bezügliche Greensche Identität:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[A\,L(B) - B\,L(A)\right] dx = \left[A\,\frac{dB}{dx} - B\,\frac{dA}{dx}\right]_{x=x_1}^{x=x_2} \tag{33}$$

gibt dann, auf $f(x)$ und $V(x, y)$ angewandt:

$$\int_0^1 V(x, y)\, F(x)\, dx + \int_0^1 f(x) \operatorname{cotg} \pi (x - y)\, dx = 0. \tag{34}$$

Die Gleichung entsteht durch $\lim \varepsilon = +0$ aus zwei entsprechenden, welche die Intervalle 0 bis $y - \varepsilon$ und $y + \varepsilon$ bis 1 umfasssen, mit Rücksicht auf die Eigenschaften von $V(x, y)$ (S. 24); das zweite Integral ist als Hauptwert zu nehmen. Wird (34) nach y integriert, so kommt:

$$-\int_0^1 \int_0^1 V(x, y)\, F(x)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x) \operatorname{cotg} \pi (x - y)\, dx\, dy = \tag{35}$$

$$= \int_0^1 f(x)\, dx \int_0^1 \operatorname{cotg} \pi (x - y)\, dy = 0.$$

Addition von (34) und (35) liefert:

$$\int_0^1 V(x, z) F(x) dx - \int_0^1 \int_0^1 V(x, y)\, F(x)\, dx\, dy = -\int_0^1 f(x) \operatorname{cotg} \pi (x - z)\, dx,$$

eine Gleichung, die ganz mit der zweiten Formel (30) übereinstimmt, wenn nur:

$$\int_0^1 V(x, z)\, F(x)\, dx = g(z)$$

gesetzt wird; der ersten Gleichung (30) entspricht so:

$$f(z) - \int_0^1 f(y) dy = \int_0^1 \int_0^1 V(x, y) \operatorname{cotg} \pi (y - z)\, F(x)\, dx\, dy. \tag{36}$$

Die Existenz eines stetigen Differentialquotienten von $g(z)$, die ja erst die Anwendbarkeit von (30) verbürgt, folgt am einfachsten aus der Form (9) von $V(x,z)$.

In (36) führen wir nun die gleichmäßig konvergente Reihe (22):

$$V(x,y)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2}$$

ein; dann ergibt sich:

$$(37)\quad \begin{cases} f(z)-\int_0^1 f(y)\,dy=\int_0^1\int_0^1\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2}\operatorname{cotg}\pi(y-z)F(x)\,dx\,dy= \\ \quad=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu^2}\int_0^1\varphi_\nu(x)F(x)\,dx\,.\int_0^1\psi_\nu(x)\operatorname{cotg}\pi(x-z)\,dx. \end{cases}$$

Die Identität (32) gibt nun, mit:

$$A(x)=\varphi_\nu(x),\qquad L\left(A(x)\right)=-\lambda_\nu^2\varphi_\nu(x);$$

$$B(x)=f(x),\qquad L\left(B(x)\right)=-F(x):$$

$$\frac{1}{\lambda_\nu^2}\int_0^1\varphi_\nu(x)F(x)\,dx=\frac{1}{\lambda_\nu^2}\int_0^1 f(x)\,\lambda_\nu^2\varphi_\nu(x)\,dx,$$

da nach der Definition (19) $\varphi_\nu(x)$ denselben Randbedingungen genügt, wie $f(x)$:

$$(38)\qquad \frac{1}{\lambda_\nu^2}\int_0^1\varphi_\nu(x)F(x)\,dx=\int_0^1\varphi_\nu(x)\,.\,f(x)\,dx.$$

Ferner wird:

$$(39)\quad \begin{cases} \int_0^1\psi_\nu(x)\operatorname{cotg}\pi(x-z)\,dx= \\ \quad=-\int_0^1\int_0^1 u_2(\lambda_\nu^2,x)\operatorname{cotg}\pi(x-y)\operatorname{cotg}\pi(y-z)\,dx\,dy= \\ \qquad=u_2(\lambda_\nu^2,z)-\int_0^1 u_2(\lambda_\nu^2,y)\,dy, \end{cases}$$

da aus der Reziprozität (30) die Identität:

$$g(z)-\int_0^1 g(y)\,dy=-\int_0^1\int_0^1 g(x)\operatorname{cotg}\pi(x-y)\operatorname{cotg}\pi(y-z)\,dx\,dy$$

folgt. Setzen wir jetzt (38) und (39) in (37) ein, so erhalten wir die gleichmäßig für $0\leq z\leq 1$ konvergente Darstellung:

$$f(z)-\int_0^1 f(y)\,dy=\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^1\varphi_\nu(x)f(x)\,dx\,.\left\{u_2(\lambda_\nu^2,z)-\int_0^1 u_2(\lambda_\nu^2,y)\,dy\right\}.$$

Für $z = 0$ verschwinden $f(z)$ und sämtliche $u_2(\lambda_\nu^2, z)$; es ist daher:

$$\int_0^1 f(y)\,dy = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 \varphi_\nu(x) f(x)\,dx \cdot \int_0^1 u_2(\lambda_\nu^2, y)\,dy,$$

und daher wegen der Konvergenz beider Reihen:

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_2(\lambda_\nu^2, z) \cdot \int_0^1 \varphi_\nu(x) f(x)\,dx. \tag{40}$$

Erinnern wir uns noch, daß nach (19) $\varphi_\nu(x)$ bis auf den von $f(x)$ ganz unabhängigen, aus der Normierung von $u_1(\lambda^2, x)$ und $u_2(\lambda^2, x)$ entspringenden Faktor:

$$C_\nu = \frac{2\lambda_\nu u_1(\lambda_\nu^2, 1)}{\left(\frac{\partial}{\partial\lambda} u_2(\lambda_\nu^2, 1)\right)_{\lambda=\lambda_\nu}} \tag{41}$$

mit $u_2(\lambda_\nu^2, x)$ zusammenfällt, so haben wir damit die Entwicklung einer willkürlichen, zweimal stetig differenzierbaren Funktion, die den Randbedingungen (7) genügt, nach den zu denselben Randbedingungen gehörigen Eigenfunktionen von $L(u)$ gewonnen:

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_2(\lambda_\nu^2, z) \cdot C_\nu \int_0^1 u_2(\lambda_\nu^2, x) f(x)\,dx. \tag{42}$$

III. Kapitel.

Pochhammersche Reihenentwicklungen.

§ 1. Definition der Greenschen Funktion und der Eigenwerte.

Im 74. Band des Crelleschen Journals behandelt Pochhammer lineare gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Typus:

$$(1) \qquad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + g(x) \frac{dy}{dx} + h(x)\, y + \lambda(1 - b - \lambda)\, y = 0.$$

Hierin bedeutet λ einen komplexen Parameter, und $g(x)$ und $h(x)$ sind in der Umgebung von $x = 0$ eindeutige, reguläre Funktionen, die für $x = 0$ verschwinden:

$$(2) \qquad \begin{cases} g(x) = b\,x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + \cdots, \\ h(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots. \end{cases}$$

Die (von λ unabhängigen) Konstanten $b, b_1, b_2, \ldots; c_1, c_2, c_3, \ldots$ sind im allgemeinen komplex, und nur b wird der einzigen Einschränkung unterworfen:

$$(3) \qquad b \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Wenn wir mit $\mathfrak{P}(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ konvergierende Reihen nach ganzen positiven Potenzen von x bezeichnen, wird die linke Seite von (1) durch Multiplikation mit:

$$\frac{1}{x^2} f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{\int^x \frac{g(z)}{z^2} dz} = \frac{1}{x^2}\, e^{\int^x \frac{b}{z} dz}\, \mathfrak{P}_1(x) = x^{b-2} \cdot \mathfrak{P}_1(x)$$

sich selbst adjungiert, und nimmt, wenn wir noch $\lambda = \frac{1-b}{2} + \mu$ setzen, die Form an:

$$(4) \qquad L(y) \equiv \frac{d}{dx}\left[f(x) \frac{dy}{dx}\right] + q(x)\, y + \left[\left(\frac{1-b}{2}\right)^2 - \mu^2\right] \frac{f(x)}{x^2}\, y,$$

$$(5) \qquad f(x) = x^b\, \mathfrak{P}_1(x), \qquad q(x) = x^{b-1}\, \mathfrak{P}_2(x).$$

Wie aus (1) hervorgeht, ist für die Gleichung $L(y) = 0$ die Stelle $x = 0$ ein singulärer Punkt der Bestimmtheit, und die Exponenten der Anfangsglieder zweier Partikularlösungen bestimmen sich aus der determinierenden Fundamentalgleichung:

$$r(r-1) + br + \left(\frac{1-b}{2}\right)^2 - \mu^2 = 0$$

zu $\quad r_1 = \frac{1-b}{2} - \mu, \qquad r_2 = \frac{1-b}{2} + \mu,$ also:

$$(6)\quad \begin{cases} y_1(\mu, x) = x^{\frac{1-b}{2}-\mu} \cdot \mathfrak{P}_3(\mu, x) = x^{\frac{1-b}{2}-\mu} \cdot \sum_{h=0}^{\infty} A_h(\mu)\, x^h, \\ y_2(\mu, x) = x^{\frac{1-b}{2}+\mu} \cdot \mathfrak{P}_4(\mu, x) = x^{\frac{1-b}{2}+\mu} \cdot \sum_{h=0}^{\infty} B_h(\mu)\, x^h, \\ A_0(\mu) = B_0(\mu) = 1. \end{cases}$$

Durch Vertauschen von μ und $-\mu$ geht $y_1(\mu, x)$ in $y_2(\mu, x)$ über, also ist:

$$(7)\qquad A_h(\mu) = B_h(-\mu) \qquad (h = 0, 1, 2, \cdots).$$

Es sei nun ξ eine von Null verschiedene, aber absolut so kleine Zahl der komplexen x-Ebene, daß der Kreis durch ξ um den Nullpunkt ganz innerhalb des Konvergenzbereichs der Reihen $y_1(\mu, x)$ und $y_2(\mu, x)$ liege. Wir definieren dann die Greensche Funktion $V(\mu^2, x, \xi)$ für $|x| > |\xi|$, d. h. in dem ringförmigen Gebiet $\mathfrak{G}$ zwischen jenem Kreis und der (vielleicht unendlich fernen) Konvergenzgrenze folgendermaßen: V genüge mit dem Argument x der inhomogenen Gleichung:

$$(8)\qquad L(V) = \frac{1}{x - \xi};$$

ferner werde $f(x) \cdot V(\mu^2, x, \xi)$ nicht geändert, wenn x irgend eine geschlossene Kurve in dem Ringgebiet beschreibt. Es wird sich zeigen, daß diese Forderungen, von abzählbar vielen Werten von μ^2 abgesehen, V eindeutig bestimmen.

Das allgemeine Integral von (8) lautet:

$$\begin{cases} V(\mu^2, x, \xi) = \gamma_1(\mu, \xi)\, y_1(\mu, x) + \gamma_2(\mu, \xi)\, y_2(\mu, x) - \\ \qquad - y_1(\mu, x) \cdot \int_{c_1}^{x} \frac{y_2(\mu, z)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'(\mu, z)} \cdot \frac{1}{f(z)} \cdot \frac{dz}{z - \xi} + \\ \qquad + y_2(\mu, x) \cdot \int_{c_2}^{x} \frac{y_1(\mu, z)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'(\mu, z)} \cdot \frac{1}{f(z)} \cdot \frac{dz}{z - \xi}, \end{cases}$$

oder, da y_1 und y_2 (1) genügen, nach der Greenschen Identität, sowie nach (5) und (6):

$$f(x)\cdot\left[y_1 y'_2 - y_2 y'_1(\mu, x)\right] = \text{const.} = 2\mu,$$

$$(9)\quad \begin{cases} V(\mu^2, x, \xi) = \gamma_1 y_1(\mu, x) + \gamma_2 y_2(\mu, x) - \\ \qquad - \dfrac{y_1(\mu, x)}{2\mu}\displaystyle\int_{c_1}^{x} \frac{y_2(\mu, z)}{z-\xi}\,dz + \frac{y_2(\mu, x)}{2\mu}\int_{c_2}^{x} \frac{y_1(\mu, z)}{z-\xi}\,dz. \end{cases}$$

$c_1 = c_1(\mu, \xi)$ und $c_2 = c_2(\mu, \xi)$ seien irgendwelche Punkte in $\mathfrak{G}$, auch darf der Integrationsweg das Gebiet $\mathfrak{G}$ nicht verlassen. Wir können dann, wenn wir y_1 und y_2 nach Potenzen von z, $\frac{1}{z-\xi}$ nach solchen von $\frac{\xi}{z}$ entwickeln, wegen der gleichmäßigen und absoluten Konvergenz der Reihen in $\mathfrak{G}$ nachträglich wieder nach Potenzen von z zusammenfassen.

Das allgemeine Glied von $\frac{y_2(\mu, z)}{z-\xi}$ bezw. $\frac{y_1(\mu, z)}{z-\xi}$ lautet:

$$(10)\quad \begin{cases} B_h(\mu)\, z^{\frac{1-b}{2}+\mu+h}\cdot \xi^k z^{-k-1} = \\ = B_h(\mu)\, \xi^k z^{\frac{1-b}{2}+\mu+h-k-1} \qquad \text{bezw.} \\ A_h(\mu)\, \xi^k z^{\frac{1-b}{2}-\mu+h-k-1} \qquad (h = 0, 1, 2, \cdots;\ k = 0, 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

Bei der Integration nach z tritt im Nenner

$$\frac{1-b}{2}+\mu+h-k \qquad \text{bezw.} \frac{1-b}{2}-\mu+h-k$$

auf, Ausdrücke, die nur für

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = \mu_\nu = -\dfrac{1-b}{2}+\nu \\ \mu = \mu'_\nu = \quad \dfrac{1-b}{2}-\nu \end{array} \right\} \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

und gewisse Kombinationen h, k verschwinden. Dies sind also die Pole von $\int_{c_1}^{x} \frac{y_2(\mu, z)}{z-\xi}\,dz$ bezw. $\int_{c_2}^{x} \frac{y_1(\mu, z)}{z-\xi}\,dz$; da nach (3) kein μ_ν mit einem μ'_ν zusammenfällt, bilden sie auch die Pole von $V(\mu^2, x, \xi)$ selbst; sie sind sämtlich einfach.

Für einen von allen Polen verschiedenen Wert μ wird nach (9) und (10):

$$(12)\quad \begin{cases} V(\mu^2, x, \xi) = \\ = \left[-\frac{1}{2\mu} J_1(\mu, x, \xi) + \frac{1}{2\mu} J_1\left(\mu, c_1(\mu, \xi), \xi\right) + \gamma_1(\mu, \xi) \right] y_1(\mu, x) + \\ + \left[\frac{1}{2\mu} J_2(\mu, x, \xi) - \frac{1}{2\mu} J_2\left(\mu, c_2(\mu, \xi), \xi\right) + \gamma_2(\mu, \xi) \right] y_2(\mu, x), \end{cases}$$

wenn wir:

$$(13)\quad \begin{cases} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_h(\mu)}{\frac{1-b}{2} + \mu + h - k} \xi^k z^{\frac{1-b}{2} + \mu + h - k} = J_1(\mu, z, \xi), \\ \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_h(\mu)}{\frac{1-b}{2} - \mu + h - k} \xi^k z^{\frac{1-b}{2} - \mu + h - k} = J_2(\mu, z, \xi) \end{cases}$$

setzen. Nehmen wir nun, nach beliebiger Wahl von $c_1(\mu, \xi)$ und $c_2(\mu, \xi)$:

$$\begin{cases} \gamma_1(\mu, \xi) = -\frac{1}{2\mu} J_1\left(\mu, c_1(\mu, \xi), \xi\right), \\ \gamma_2(\mu, \xi) = -\frac{1}{2\mu} J_2\left(\mu, c_2(\mu, \xi), \xi\right), \end{cases}$$

so reduziert sich (12) auf den vollkommen eindeutigen Ausdruck:

$$(14)\quad V(\mu^2, x, \xi) = -\frac{1}{2\mu} J_1(\mu, x, \xi) y_1(\mu, x) + \frac{1}{2\mu} J_2(\mu, x, \xi) y_2(\mu, x),$$

und aus (5), (6), (13) ergibt sich tatsächlich, daß $f(x) \cdot V(\mu^2, x, \xi)$ durch einen geschlossenen Umlauf von x in $\mathfrak{G}$ nicht geändert wird.

Eine einfache Rechnung ergibt die Identität von $y_1\left(\frac{1-b}{2} + \nu, x\right) = y_1(\mu_\nu, x)$ und von $y_2\left(-\frac{1-b}{2} + \nu, x\right) = y_2(\mu_\nu, x)$ $(\nu = 0, +1, +2, \cdots)$ mit der Pochhammerschen Funktion $P_\nu(x) = x^\nu \cdot \mathfrak{P}(x)$. Da, wie sich in § 3 ergeben wird, die Pole μ_ν und μ'_ν für $\nu = -1, -2, \cdots$ unwesentlich sind, stellen die wesentlichen Pole $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ zugleich die Eigenwerte der homogenen Gleichung (1) dar, für die sie eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Lösung besitzt.

Definieren wir für beliebiges komplexes ν: $P_\nu(x) = y_1\left(\frac{1-b}{2} - \nu, x\right) = y_2\left(-\frac{1-b}{2} + \nu, x\right)$, so läßt sich Pochhammers Beweis, daß $P_\nu(x)$ für unbegrenzt wachsendes ν asymptotisch zu x^ν wird[1], ohne Änderung auf komplexes ν übertragen. Ganz ebenso findet man, zuerst für ganze positive, dann für beliebige ν, daß

$$y_1\left(-\frac{1-b}{2} + \nu, x\right) = y_2\left(\frac{1-b}{2} - \nu, x\right) = Q_\nu(x) : \frac{f(x)}{x^\nu}$$

asymptotisch in $x^{1-b-\nu}$ übergeht.

[1] a. a. O., S. 321 ff.

§ 2. Partialbruchzerlegung der Greenschen Funktion.

Um das Residuum von $\Gamma(\mu^2, x, \xi)$ für $\mu = \mu_\nu$ zu finden, genügt es nach § 1, aus:

$$J_1(\mu_\nu, x, \xi) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_h(\mu_\nu)}{\frac{1-b}{2} + \mu_\nu + h - k} \xi^k x^{\frac{1-b}{2} + \mu_\nu + h - k}$$

diejenigen Glieder herauszulesen, für die

$$\frac{1-b}{2} + \mu_\nu + h - k = \nu + h - k = 0$$

ist. Je nachdem $\nu \geqq 0$ oder $\nu < 0$, ergeben sich dafür verschiedene Ausdrücke.

I. $\nu \geqq 0$. Die drei Forderungen:

$$k - h = \nu, \qquad k \geqq 0, \qquad h \geqq 0$$

lassen sich in zwei zusammenziehen:

$$h \geqq 0, \qquad k = h + \nu;$$

es bleiben daher die Glieder:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{h=0}^{\infty} B_h(\mu_\nu) \xi^{h+\nu} = \xi^\nu \sum_{h=0}^{\infty} B_h(\mu_\nu) \xi^h = \\ &\qquad = \xi^{\frac{1-b}{2} + \mu_\nu} \sum_{h=0}^{\infty} B_h(\mu_\nu) \xi^\nu = y_2(\mu_\nu, \xi). \end{aligned} \right.$$

II. $\nu < 0$. Aus den drei Formeln:

$$k - h = \nu, \qquad k \geqq 0, \qquad h \geqq 0$$

wird: $\qquad h \geqq -\nu, \qquad k = h + \nu;$

es bleibt daher nur:

$$(16) \qquad \sum_{h=-\nu}^{\infty} B_h(\mu_\nu) \xi^{h+\nu} = \eta_2(\mu_\nu, \xi),$$

wie wir den um die ersten $-\nu$ Glieder verkürzten Ausdruck von $y_2(\mu_\nu, \xi)$ schreiben wollen.

Aus (14), (15), (16) folgt so für das Residuum von $\Gamma(\mu^2, x, \xi)$ an der Stelle $\mu = \mu_\nu$:

$$(17) \qquad r_\nu(x, \xi) = \begin{cases} -\dfrac{y_1(\mu_\nu, x)\, y_2(\mu_\nu, \xi)}{2\mu_\nu} & (\nu \geqq 0), \\ -\dfrac{y_1(\mu_\nu, x)\, \eta_2(\mu_\nu, \xi)}{2\mu_\nu} & (\nu < 0). \end{cases}$$

Ebenso werden die Pole $\mu = \mu'_\nu$ behandelt.

Aus $J_2(\mu'_\nu, x, \xi) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_h(\mu'_\nu)}{\frac{1-b}{2} - \mu'_\nu + h - k} \xi^k x^{\frac{1-b}{2} - \mu'_\nu + h - k}$

suchen wir diejenigen Glieder, für die:

$$\frac{1-b}{2} - \mu'_\nu + h - k = \nu + h - k = 0, \quad \text{daher:}$$

$$k - h = \nu, \qquad k \geqq 0, \qquad h \geqq 0$$

wird. Dies gibt im Fall

I. $\nu \geqq 0$: $\qquad h \geqq 0, \qquad k = h + \nu,$

$$\sum_{h=0}^{\infty} A_h(\mu'_\nu)\,\xi^{h+\nu} = \xi^\nu \sum_{h=0}^{\infty} A_h(\mu'_\nu)\,\xi^h =$$

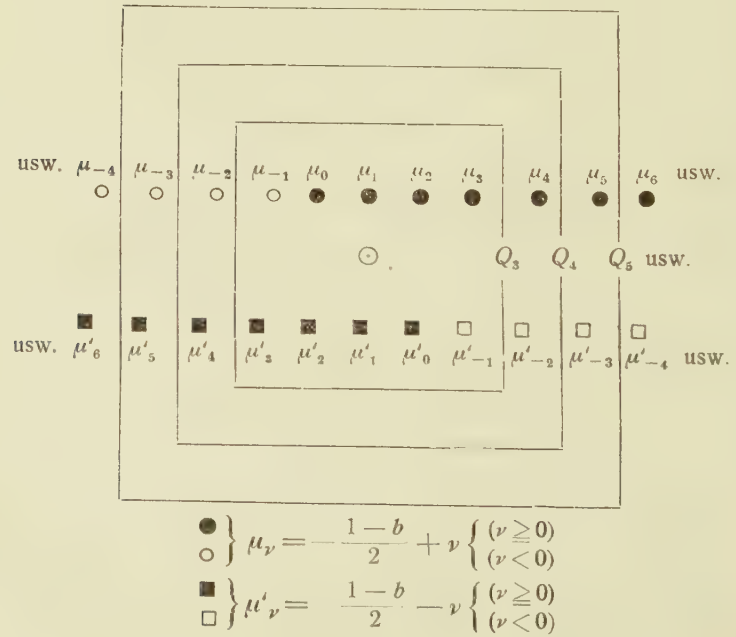
$$= \xi^{\frac{1-b}{2} - \mu'_\nu} \cdot \sum_{h=0}^{\infty} A_h(\mu'_\nu)\,\xi^h = y_1(\mu'_\nu, \xi);$$

II. $\nu < 0$: $\qquad h \geqq -\nu, \qquad k = h + \nu,$

$$\sum_{h=-\nu}^{\infty} A_h(\mu'_\nu)\,\xi^{h+\nu} = \eta_{i1}(\mu'_\nu, \xi),$$

d. h. $y_1(\mu'_\nu, \xi)$ ohne seine ersten $-\nu$ Glieder. Das Residuum von $V(\mu^2, x, \xi)$ am Pol $\mu = \mu'_\nu$ wird so:

$$(18) \qquad r'_\nu(x, \xi) = \begin{cases} -\dfrac{y_2(\mu'_\nu, x)\, y_1(\mu'_\nu, \xi)}{2\mu'_\nu} & (\nu \geqq 0), \\ -\dfrac{y_2(\mu'_\nu, x)\, \eta_1(\mu'_\nu, \xi)}{2\mu'_\nu} & (\nu < 0). \end{cases}$$



$$\left.\begin{matrix}\bullet \\ \circ\end{matrix}\right\} \mu_\nu = -\frac{1-b}{2} + \nu \begin{cases} (\nu \geqq 0) \\ (\nu < 0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\blacksquare \\ \square\end{matrix}\right\} \mu'_\nu = \frac{1-b}{2} - \nu \begin{cases} (\nu \geqq 0) \\ (\nu < 0) \end{cases}$$

Zur Partialbruch-Darstellung von $V(\mu^2, x, \xi)$ gehen wir ebenso vor wie in § 3 des II. Kapitels. Wir konstruieren in der μ-Ebene Quadrate, die jeweils die vorhergehenden umschließen, auf ihren Rändern keine Pole haben, und nach und nach jeden endlichen Punkt der Ebene enthalten. Da sich nach S. 40 für hinreichend große μ $y_1(\mu, x)$ wie $x^{\frac{1-b}{2}}\,\mu^{\cdots}$ $y_2(\mu, x)$ wie $x^{\frac{1-b}{2}+\mu}$ verhält, zeigt die Darstellung (14), daß gleichmäßig in einem endlichen x- und ξ-Gebiet und in einem endlichen μ-Bereich, der keine Pole enthält:

$$\frac{f(x)}{x^2} \cdot V(\mu^2, x, \xi) < \frac{\text{Const.}}{\mu}$$

wird. Daher ist $V(\mu^2, x, \xi)$ geradezu gleich der Summe der Partialbrüche, wobei für die Summationsordnung das Auftauchen der Pole in den aufeinanderfolgenden Quadraten maßgebend ist.

Wir geben nun unseren Quadraten den Mittelpunkt $\mu = 0$, Seiten parallel den Koordinatenachsen, und Seitenlängen, die jeweils um die Strecke 2 zunehmen. Dann kann man es, was auch der komplexe Wert von b sein mag, stets so einrichten, daß (von $\nu = \nu_0$ an) Q_ν außer den Polen innerhalb $Q_{\nu-1}$ genau vier neue enthält, nämlich μ_ν, μ'_ν, $\mu_{\cdots\varrho}$, $\mu'_{\cdots\varrho}$, worin $\varrho > 0$, und die Differenz $\nu - \varrho$ eine feste ganze Zahl $\gtrless 0$ ist. (In der Figur S. 42 z. B., wo $b = -\frac{1}{2} + 2i$, ist $\nu_0 = 4$, $\nu - \varrho = 2$.) Bedeutet dann $R(\lambda^2, x, \xi)$ die Summe der endlich vielen Partialbrüche, die sich auf die Pole innerhalb Q_{ν_0} beziehen, so wird, unter λ irgend einen, von allen Polen verschiedenen Wert verstanden:

$$(19)\quad \begin{cases} V(\lambda^2, x, \xi) = R(\lambda^2, x, \xi) + \\ \quad + \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} \left[\frac{r_\nu(x,\xi)}{\lambda - \mu_\nu} + \frac{r'_\nu(x,\xi)}{\lambda - \mu'_\nu} + \frac{r_{\cdots\varrho}(x,\xi)}{\lambda - \mu_{\cdots\varrho}} + \frac{r'_{\cdots\varrho}(x,\xi)}{\lambda - \mu'_{\cdots\varrho}} \right]. \end{cases}$$

Wegen (7), (11), (17) und (18) ist aber:

$$\mu_\nu = -\mu'_\nu \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$
$$y_1(\mu, x) = y_2(-\mu, x),$$
$$\eta_1(\mu, x) = \eta_2(-\mu, x),$$

$$r_\nu(x,\xi) = -r'_\nu(x,\xi) = -\frac{y_1(\mu_\nu, x)\, y_2(\mu_\nu, \xi)}{2\mu_\nu} \qquad (\nu \geqq 0),$$

$$r_{\cdots\varrho}(x,\xi) = -r'_{\cdots\varrho}(x,\xi) = -\frac{y_1(\mu_{\cdots\varrho}, x)\, \eta_2(\mu_{\cdots\varrho}, \xi)}{2\mu_{\cdots\varrho}} \qquad (\varrho > 0).$$

Daher wird (19) einfacher:

$$(20)\quad \left\{ \begin{array}{l} V(\lambda^2, x, \xi) = R(\lambda^2, x, \xi) + \\ \qquad + \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} \left[\frac{y_1(\mu_\nu, x)\, y_2(\mu_\nu, \xi)}{\mu^2_\nu - \lambda^2} + \frac{y_1(\mu_{-\varrho}, x)\, \eta_2(\mu_{-\varrho}, \xi)}{\mu^2_{-\varrho} - \lambda^2} \right]. \end{array} \right.$$

§ 3. Reihenentwicklung einer willkürlichen Funktion.

Es sei $\varphi(x)$ eine beliebige, in der Umgebung von $x = 0$ eindeutige und reguläre Funktion:

$$\varphi(x) = e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + \cdots.$$

Um sie in eine nach den $y_2(\mu_\nu, x)$ fortschreitende Reihe zu entwickeln, bilden wir:

$$(21)\qquad \Phi(x) = L_0\left(\varphi(x)\right),$$

wobei der Operator L_0 aus L durch $\mu^2 = \lambda^2$ entstehe, also nach (4) die Bedeutung habe:

$$(22)\quad L_0(\varphi) \quad \frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{d\varphi}{dx}\right) + q(x)\varphi(x) + \left[\left(\frac{1}{2} - b\right)^2 - \lambda^2\right]\frac{f(x)}{x^2}\varphi(x).$$

Die Greensche Identität:

$$U L_0(V) - V L_0(U) \quad \frac{d}{dx}\left[f(x)\left(U\frac{dV}{dx} - V\frac{dU}{dx}\right)\right]$$

wenden wir nun auf:

$$U(x) = \varphi(x), \qquad L_0\left(U(x)\right) = \Phi(x);$$

$$V(x) = V(\lambda^2, x, \xi), \qquad L_0\left(V(x)\right) = \frac{1}{x - \xi}$$

an, und erhalten:

$$\frac{\varphi(x)}{x - \xi} - \Phi(x)\, V(\lambda^2, x, \xi) \quad \frac{d}{dx}\left[f(x)\left(\varphi\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{d\varphi}{dx}\right)\right].$$

Integrieren wir jetzt längs einer geschlossenen Kurve der x-Ebene um die Stelle $x = \xi$ herum, so fällt die rechte Seite der letzten Gleichung weg, da $\varphi, f\frac{\partial V}{\partial x}, fV$ und $\frac{d\varphi}{dx}$ bei einem Umlauf sich nicht ändern, und es bleibt nur:

$$\int_{\circ} \frac{\varphi(x)}{x - \xi}\, dx = \int_{\circ} V(\lambda^2, x, \xi)\, \Phi(x)\, dx \qquad \text{oder}$$

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\circ} V(\lambda^2, x, \xi)\, \Phi(x)\, dx.$$

Darin setzen wir die Partialbruchzerlegung (20) ein:

$$(23)\quad \begin{cases} \varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_0 R(\lambda^2, x, \xi)\, \Phi(x)\, dx + \\ + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} \int_0 \left[\frac{y_1(\mu_\nu, x)\, y_2(\mu_\nu, \xi)}{\mu_\nu^2 - \lambda^2} + \frac{y_1(\mu_{-\varrho}, x)\, \eta_2(\mu_{-\varrho}, \xi)}{\mu_{-\varrho}^2 - \lambda^2} \right] \Phi(x)\, dx. \end{cases}$$

Nun ist die niederste Potenz von x in:

$$\begin{array}{lll} y_1(\mu, x) & x^{\frac{1-b}{2} - \mu}, & \\ y_1(\mu_{-\varrho}, x) & x^{\frac{1-b}{2} + \frac{1-b}{2} + \varrho} = x^{1-b+\varrho}, & \\ \Phi(x) & x^{b-2}, & \end{array}$$

daher beginnt $\frac{y_1(\mu_{-\varrho}, x)\, \eta_2(\mu_{-\varrho}, \xi)}{\mu_{-\varrho}^2 - \lambda^2}\, \Phi(x)$ mit der Potenz $x^{-1+\varrho}$, und dies ist, da ϱ eine ganze positive Zahl, ganzzahlig und $\geqq 0$. Somit fällt in jedem Summanden von (23) das Integral über den zweiten Teil weg, und es ist:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0 \frac{y_1(\mu_\nu, x)\, y_2(\mu_\nu, \xi)}{\mu_\nu^2 - \lambda^2}\, \Phi(x)\, dx.$$

Die Anwendung der Greenschen Identität auf $y_1(\mu_\nu, x)$ und $\Phi(x)$ gibt nach (4):

$$\begin{cases} \int_0 y_1(\mu_\nu, x)\, \Phi(x)\, dx = \int_0 L_0\left(y_1(\mu_\nu, x)\right) \varphi(x)\, dx = \\ \qquad = (\mu_\nu^2 - \lambda^2) \int_0 y_1(\mu_\nu, x)\, \frac{f(x)}{x^2}\, \varphi(x)\, dx, \end{cases}$$

daher:

$$(24)\quad \varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0 y_1(\mu_\nu, x)\, \frac{f(x)}{x^2} \cdot \varphi(x)\, dx \cdot y_2(\mu_\nu, \xi).$$

Diese Formel stimmt wegen:

$$y_1(\mu_\nu, x) \cdot \frac{f(x)}{x^2} = Q_\nu(x), \qquad y_2(\mu_\nu, x) = P_\nu(x)$$

völlig mit der von Pochhammer gefundenen überein.

Die Entwicklung (24) umfaßt als Spezialfall die gewöhnliche Potenzdarstellung von $\varphi(\xi)$. Reduzieren sich nämlich in (2) $g(x)$ und $h(x)$ auf ihre Anfangsglieder:

$$g(x) = b\,x, \qquad h(x) = 0,$$

so wird:

$$\frac{1}{x^2} f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\int^x \frac{b\,z}{z^2} dz} = x^{b-2};$$

$$y_1(\mu, x) = x^{\frac{1-b}{2} - \mu}, \qquad y_1(\mu_\nu, x) = x^{1-b-\nu};$$

$$y_2(\mu, \xi) = \xi^{\frac{1-b}{2} + \mu}, \qquad y_2(\mu_\nu, \xi) = \xi^\nu,$$

und (24) heißt jetzt:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_o x^{1-b-\nu}\, x^{b-2}\, \varphi(x)\, dx \cdot \xi^\nu,$$

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_o x^{-\nu-1}\, \varphi(x)\, dx \cdot \xi^\nu.$$

Lebenslauf.

Ich, Gustav Löwenstein, wurde am 27. November 1890 in Stuttgart als Sohn des Kaufmanns Naftali Löwenstein und seiner Ehefrau Emilie, geb. Wormser geboren, und in der jüdischen Konfession erzogen. Nach dreijährigem Besuch der Hayerschen Vorschule trat ich im Herbst 1900 in das Kgl. Realgymnasium meiner Heimatstadt ein, das ich im Juli 1909 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Ich bezog darauf im W.-S. 1909—10 die Universität Freiburg i. Br., im S.-S. 1910 Berlin, im S.-S. 1911 Göttingen. Hier, wie in Würzburg, wo ich seit dem W.-S. 1912—13 vier Semester immatrikuliert war, widmete ich mich dem Studium der Mathematik und Astronomie, Physik und Chemie.

An den Vorlesungen der nachfolgenden Herren Professoren und Dozenten habe ich teilgenommen:

in Freiburg i. Br.: Gattermann, Himstedt, Loewy, † Lüroth, † Reinganum;

in Berlin: E. Fischer, Fr. Fischer, Frobenius, † Hettner, Knoblauch, Rubens, Schwarz;

in Göttingen: Haar, Hilbert, Klein, Landau, Michelson, Riecke, Runge, Simon, Toeplitz, Voigt;

in Würzburg: Cantor, Harms, Hilb, Rau, Rost, v. Weber, Wien.

Allen diesen Herrn, insbesondere aber Herrn Prof. Dr. Emil Hilb, der mir das Thema meiner Arbeit gestellt hat, und unter dessen Leitung sie verfertigt wurde, gebührt mein aufrichtiger und dauernder Dank.

Die mündliche Prüfung fand am 6. November 1914 statt.